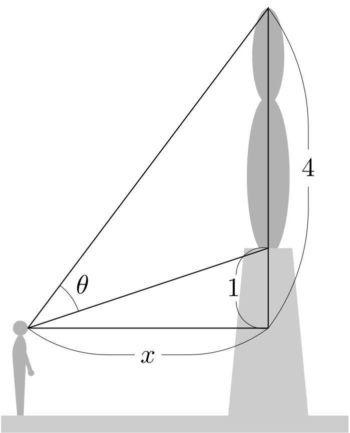
第5章の補遺1　関数の最大値・最小値の応用

関数の最大値・最小値をやや現実的な（？）問題に応用してみます．

$\boxed{例}$　子供が台座の上にある銅像を見あげます．水平な地面の上に子供も銅像も鉛直方向に立っているとします． 子供の目の位置より，銅像の下端は 1m 高く，銅像の上端は 4m 高いとします．地面上で銅像の中心からの水平距離が幾らの位置に子供が立てば，子供が銅像を見るときの視角つまり右図の角度 θ が最大になるか，調べます[7]．



子供の目の位置と銅像の中心との間の水平距離を xm （ $x>0$ ）とおき，x の関数 $f(x)$ を $\theta=f(x)$ とおきます．

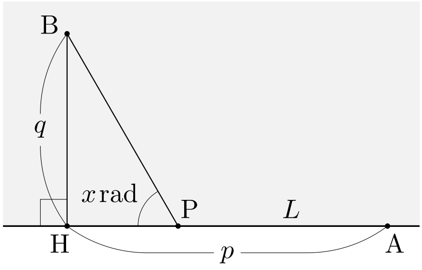
$$f(x)=\tan^{-1}\frac{4}{x}-\tan^{-1}\frac{1}{x}\ .$$

x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{4}{x}-\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{4}{x}\right)^2}\left(-\frac{4}{x^2}\right)-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=-\frac{4}{x^2+16}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{4}{x^2+16}=\frac{x^2+16-4(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+16)}\\&=\frac{3(4-x^2)}{(x^2+1)(x^2+16)}\ .\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると， $4-x^2=0$ ， $x=\pm2$ ， $x>0$ なので $x=2$ ． $0<x<2$ のとき $4-x^2>0$ なので $f'(x)>0$ ， $x>2$ のとき $4-x^2<0$ なので $f'(x)<0$ ．関数 $f(x)$ は，区間 $(0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少です． 関数 $\theta=f(x)$ は 2 において最大値をとります． 故に，地面上で銅像の中心から 2m 離れた位置に子供が立てば最も大きく見えます． $\boxed{終}$

$\boxed{例}$　直線状の海岸線に立っているライフセイバーが海で溺れかけている人を見つけたとします． 一刻も早く駆けつけなければなりません． このライフセイバーは海岸をあるところまで走ってから海に入って溺れかけている人のところに泳いでいきます．このとき，海岸を走る速さは 8m/s であり，海上を泳ぐ速さは 1.6m/s であるとします． 海岸線は直線であるとします． このライフセイバーが走り出してから溺れかけている人のところに泳ぎ着くまでの時間を最短にするためにはどこで海に入って泳ぎ始めればよいか考えます．



海岸線を表す直線を L とおき，ライフセイバーが走り出すところを表す点を A とおき，溺れかけている人がいるところを表す点を B とおきます． ライフセイバーが海に入って泳ぎだすところを表す点を P とおきます． ライフセイバーは，線分 AP が表す経路を走り，線分 PB が表す経路を泳ぎます． 点 B から直線 L に下ろした垂線の足を H とおき，長さの単位を m として， $\overline{\mathrm{AH}}=p$ とおき， $\overline{\mathrm{BH}}=q$ とおきます．更に変数 x を $x\mathrm{rad}=\angle\mathrm{BPH}$ とおきます $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$．

$$\sin x=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{PB}}}=\frac{q}{\overline{\mathrm{PB}}}\ ,\qquad \tan x=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{q}{\overline{\mathrm{PH}}}\ ,$$

よって，

$$\overline{\mathrm{PB}}=\frac{q}{\sin x}\ ,\qquad \overline{\mathrm{PH}}=\frac{q}{\tan x}\ ,$$

更に

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{PH}}=p-\frac{q}{\tan x}\ .$$

時間の単位を秒として，ライフセイバーが走り出してから溺れかけている人のところに泳ぎ着くまでの時間 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{8}+\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{1.6}=\frac{p-\dfrac{q}{\tan x}}{8}+\frac{5\cdot\dfrac{q}{\sin x}}{8}=\frac{p}{8}-\frac{q\cos x}{8\sin x}+\frac{5q}{8\sin x}\\&=\frac{p}{8}+\frac{q(5-\cos x)}{8\sin x}\ .\end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{q\{\sin x\sin x-(5-\cos x)\cos x\}}{8\sin^2x}=\frac{q(\sin^2x-5\cos x+\cos^2x)}{8\sin^2x}\\&=\frac{q(1-5\cos x)}{8\sin^2x}\ .\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると， $1-5\cos x=0$ なので， $\cos x=\frac{1}{5}$ ， $x=\cos^{-1}\frac{1}{5}$ ．$0<x<\cos^{-1}\frac{1}{5}$ のとき $f'(x)<0$ で，$\cos^{-1}\frac{1}{5}<0<\frac{\pi}{2}$ のとき $f'(x)>0$ ですから，f は $\cos^{-1}\frac{1}{5}$ において最小値をとります． ですから，海岸線の方向と溺れかけている人が見える方向の間の鋭角の大きさが $\left(\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)\mathrm{rad}\fallingdotseq1.37\,\mathrm{rad}\fallingdotseq78.5^\circ$ であるところまで海岸線を走ってから海に入って泳ぎ始めればよいことになります． この角度は，海岸を走る速さと海上を泳ぐ速さとの比だけで決まります． $\boxed{終}$

[7] このような問題をレギオモンタヌスの問題といいます