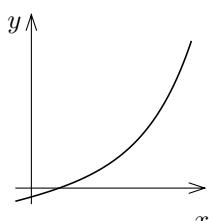
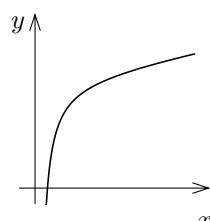


## 第5章の補遺2 関数のグラフの概形

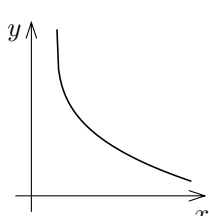
関数のグラフの概形を描くためには、関数の値の増減とそのグラフの凹凸を調べます。関数が単調増加か単調減少かということとそのグラフが下に凸か上に凸かということの組合わせで、関数のグラフについて以下の4つの状態があります。



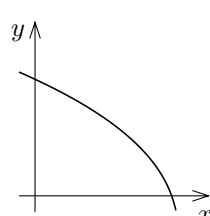
単調増加でグラフが下に凸の状態



単調増加でグラフが上に凸の状態



単調減少でグラフが下に凸の状態



単調減少でグラフが上に凸の状態

これらの4つの状態を次のような記号で表します：

関数が単調増加でそのグラフが下に凸の状態を記号  $\nearrow$  で表し、

関数が単調増加でそのグラフが上に凸の状態を記号  $\searrow$  で表し、

関数が単調減少でそのグラフが下に凸の状態を記号  $\swarrow$  で表し、

関数が単調減少でそのグラフが上に凸の状態を記号  $\nwarrow$  で表す。

定理4.3.1と定理4.7とより、2回微分可能な関数  $f$  について次のことが分かります：

$f'(x) > 0$  ,  $f''(x) \geq 0$  となる区間では  $\nearrow$  の状態であり、

$f'(x) > 0$  ,  $f''(x) \leq 0$  となる区間では  $\searrow$  の状態であり、

$f'(x) < 0$  ,  $f''(x) \geq 0$  となる区間では  $\swarrow$  の状態であり、

$f'(x) < 0$  ,  $f''(x) \leq 0$  となる区間では  $\nwarrow$  の状態である。

関数のグラフの概形を描くためにはグラフが  $\nearrow$  ,  $\searrow$  ,  $\swarrow$  ,  $\nwarrow$  のうちのどの状態かを調べます。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$  と定める。関数  $f$  の値の増減及び  $f$  のグラフの凹凸を調べ、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフの概形を描く。

【解説】 まず関数  $f$  の導関数  $f'$  と第2次導関数  $f''$  とを求める。

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3) .$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) .$$

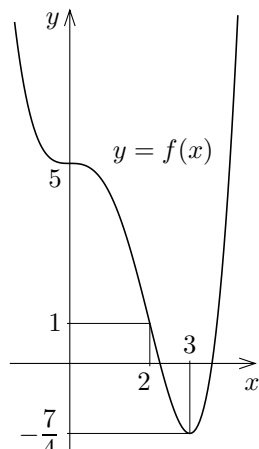
$f'(x) = 0$  とすると、 $x^2(x - 3) = 0$  なので  $x = 0, 3$  .

$f''(x) = 0$  とすると、 $3x(x - 2) = 0$  なので  $x = 0, 2$  .

$$f(0) = 5 , \quad f(2) = 1 , \quad f(3) = -\frac{7}{4} .$$

関数  $f$  の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる。

$x$	...	0	...	2	...	3	...
$f''(x) = 3x(x - 2)$	+	0	-	0	+	+	+
$f'(x) = x^2(x - 3)$	-	0	-	-	-	0	+
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$	$\nwarrow$	5	$\searrow$	1	$\swarrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$



$y = f(x)$  のグラフは右図のようになる。

**問題4.補遺2.1** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = 4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2$  と定める。関数  $g$  の値の増減及び  $g$  のグラフの凹凸を調べ、 $xy$  座標平面において  $y = g(x)$  のグラフの概形を描きなさい。

関数  $f$  の定義域が正の無限大  $\infty$  の方に限りなく伸びているとき、 $y = f(x)$  のグラフを描くためには極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  がどうなるか調べる必要があります。関数  $f$  の定義域が負の無限大  $-\infty$  の方に限りなく伸びているとき、 $y = f(x)$  のグラフを描くためには極限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  がどうなるか調べる必要があります。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$  と定める。関数  $\psi$  の値の増減及び  $\psi$  のグラフの凹凸を調べ、 $xy$  座標平面において  $y = \psi(x)$  のグラフの概形を描く。

【解説】 まず関数  $\psi$  の導関数  $\psi'$  と第2次導関数  $\psi''$  とを求める。

$$\psi'(x) = -\frac{6 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2} .$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= -12 \frac{(x^2 + 3)^2 - x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = 12 \frac{4x^2 - (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^3} = 12 \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 3)^3} \\ &= \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} . \end{aligned}$$

$\psi'(x) = 0$  とすると、 $-\frac{12x}{(x^2 + 3)^2} = 0$  ,  $(x^2 + 3)^2 > 0$  なので  $x = 0$  .  $\psi''(x) = 0$

とすると、 $\frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} = 0$  ,  $(x^2 + 3)^3 > 0$  なので  $x^2 - 1 = 0$  , よって  $x = \pm 1$  .

$$\psi(-1) = \frac{3}{2} , \quad \psi(0) = 2 , \quad \psi(1) = \frac{3}{2} .$$

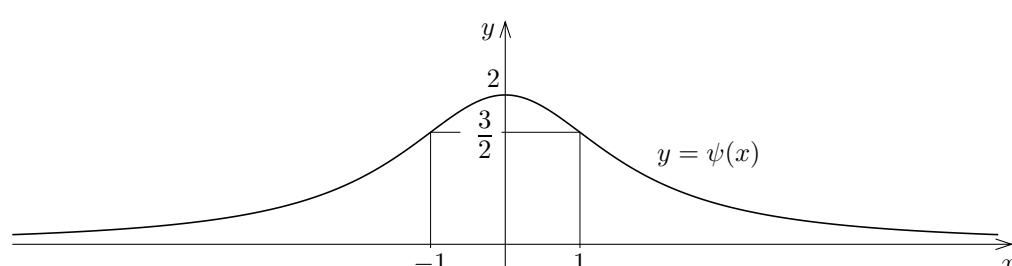
従って関数  $\psi$  の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる。

$x$	...	-1	...	0	...	1	...
$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$	+	0	-	-	-	0	+
$\psi'(x) = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$	+	+	+	0	-	-	-
$\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	2	$\swarrow$	$\frac{3}{2}$	$\nwarrow$

任意の実数  $x$  について、 $x^2 + 3 > 0$  なので、 $\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3} > 0$  . また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 + 3} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x^2 + 3} = 0 .$$

関数  $\psi$  は偶関数なので、 $y = \psi(x)$  のグラフは  $y$  軸に関して対称である。これらのことより、 $y = \psi(x)$  のグラフは次のようになる。



**問題4.補遺2.2** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^{-x^2}$  と定めます。関数  $f$  の値の増減及び  $f$  のグラフの凹凸を調べ、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフの概形を描きなさい。

**問題4.補遺2.3** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$  と定めます。関数  $\varphi$  の値の増減及び  $\varphi$  のグラフの凹凸を調べ、 $xy$  座標平面において  $y = \varphi(x)$  のグラフの概形を描きなさい。