§6.3　定義に従う定積分の計算

リーマン和の極限値として定積分を計算してみます.

定数 c に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算します. 定数 a と b とについて $a\le b$ とします. 正の各自然数 n に対して,

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ を考えます. $f(\xi_k)=c$ なので,

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\{c(x_k-x_{k-1})\}=c\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\&=c(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_1+x_4-x_3+\cdots+x_n-x_{n-1})=c(x_n-x_0)\\&=c(b-a)\ .\end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x)=c$ のリーマン和は常に $S_n=c(b-a)$ です. よって

$$\int_a^b c\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{c(b-a)\}=c(b-a)\ .$$

ここで $a=0$ とすると,

$$\int_0^b c\,dx=bc\ .$$

このように定数関数の定積分は掛け算です.

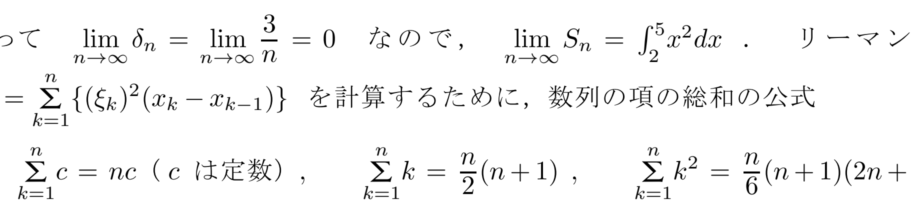
$\boxed{\text{例解}}$　関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ を計算します. 正の各自然数 n に対して,

$$2=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=5$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり, 関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ を考えます. 関数 x^2 は, 実数全体で連続ですから, 定理6.1.3より 2 から 5 まで積分可能です. 従って, $n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, $n\to\infty$ のとき関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2dx$ に収束します:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^5 x^2dx\ .$$

左辺の極限値を実際に計算するには, リーマン和 S_n を具体的に定めなければなりません. 関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ をなるべく簡単な式で表すために, 数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ が等差数列になるように定めます. 公差を d とおくと, $x_n=x_0+dn$ なので $d=\dfrac{x_n-x_0}{n}=\dfrac{5-2}{n}=\dfrac{3}{n}$. よって, 自然数 $k=0,1,2,3,\dots,n$ について $x_k=x_0+dk=2+\dfrac{3}{n}k$. また, 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ について $\xi_k=x_k=2+\dfrac{3}{n}k$ と定めます. 次の図のようになります.



自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{3}{n}$ なので,

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}=d=\frac{3}{n}\ ;$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$ なので, $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^5 x^2dx$. リーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ を計算するために, 数列の項の総和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc\text{（ }c\text{ は定数）},\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{2}(n+1)\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

を用います.

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\}=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\\&=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{12}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right)=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+\frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+6(n+1)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\}=12+18\frac{n+1}{n}+\frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\\&=12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^5 x^2dx&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\&=12+18(1+0)+\frac{9}{2}(2+0+0)\\&=39\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.1}}$　関数 x^2 は, 実数全体で連続なので, 1 から 4 まで積分可能です. 正の各自然数 n に対して,

$$1=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=4$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ を次のように定めます: $x_0=1$, 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k=\xi_k=1+\dfrac{3}{n}k$. 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}=\frac{3}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束します. よって関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_1^4 x^2dx$ に収束します: $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_1^4 x^2dx$. 定積分 $\int_1^4 x^2dx$ を関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値として計算しなさい.

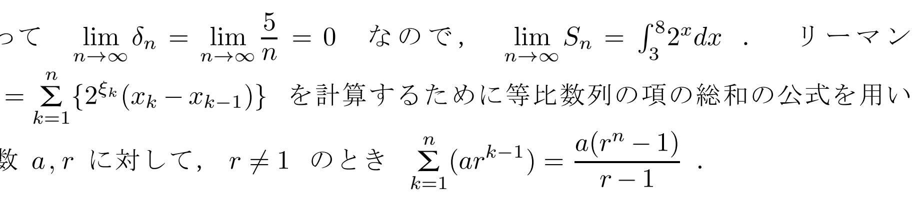
$\boxed{\text{例解}}$　指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^xdx$ を計算します. 正の各自然数 n に対して,

$$3=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=8$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ を考えます. 指数関数 2^x は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能です. 従って, $n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, $n\to\infty$ のとき指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^xdx$ に収束します:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_3^8 2^xdx\ .$$

リーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ をなるべく簡単な式で表すために次のように定めます: $x_0=3$, 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して, $x_k=3+\dfrac{5}{n}k$, ここで $\xi_k=x_k$ とせずに $\xi_k=x_{k-1}$ としたのはそうする方が後で計算し易いからです.



自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}=d=\frac{5}{n}\ ;$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=0$ なので, $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_3^8 2^xdx$. リーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ を計算するために等比数列の項の総和の公式を用います: 定数 a,r に対して, $r\ne1$ のとき $\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1})=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$.

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{2^{3+\frac{5}{n}(k-1)}\frac{5}{n}\right\}=\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)}\right\}\\&=\frac{5\cdot2^3}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{5}{n}(k-1)}=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}=\frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}\\&=\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .\end{aligned}$$

ここで変数 t を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおきます. $2^{\frac{5}{n}}=1+t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln2^{\frac{5}{n}}=\ln(1+t)$, $\dfrac{5}{n}\ln2=\ln(1+t)$, $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\ln(1+t)}{5\ln2}$ なので,

$$\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40\ln(1+t)}{5\ln2}\cdot\frac{31}{t}=\frac{248}{\ln2}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\ .$$

よって $S_n=\dfrac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$. $n\to\infty$ のとき $t=2^{\frac{5}{n}}-1\to2^0-1=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}\ .$$

2.9節で述べたように, $t\to0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は自然対数の底 e に収束します: $\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{248}{\ln2}\ln\left\{\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{248}{\ln2}\ln e=\frac{248}{\ln2}\ .$$

故に,

$$\int_3^8 2^xdx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{t\to0}\left\{\frac{248}{\ln2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{248}{\ln2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.2}}$　指数関数 3^x は, 実数全体連続ですから, 2 から 4 まで積分可能です. 正の各自然数 n に対して,

$$2=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=4$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ を次のように定めます: $x_0=2$, 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k=2+\dfrac{2}{n}k$, $\xi_k=2+\dfrac{2}{n}(k-1)=x_{k-1}$. 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ に対して $x_k-x_{k-1}=\dfrac{2}{n}$ なので,

$$\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}=\frac{2}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束します. よって関数 3^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_2^4 3^xdx$ に収束します: $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_2^4 3^xdx$. 定積分 $\int_2^4 3^xdx$ を関数 3^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値として計算しなさい.