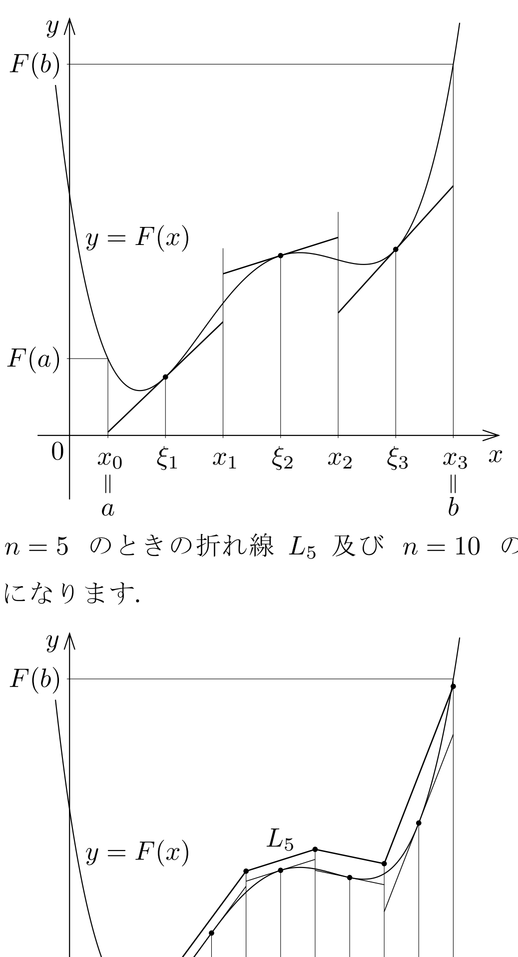
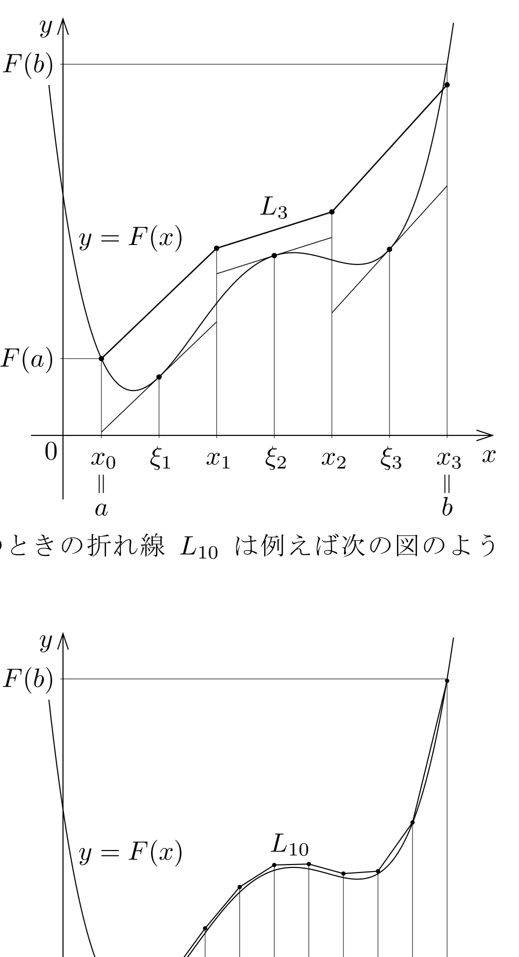
§6.4　微分積分の基本定理

　実数 a,b について $a \leq b$ とします．関数 F は区間 $[a,b]$ において微分可能であり，F の導関数 F' は a から b まで定積分可能であるとします．xy 座標平面において関数 $y=F(x)$ のグラフを考えます．正の自然数 n に対して

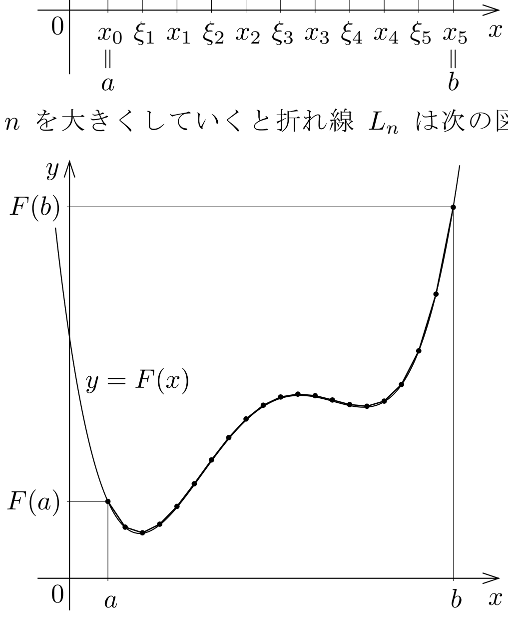
$$a=x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

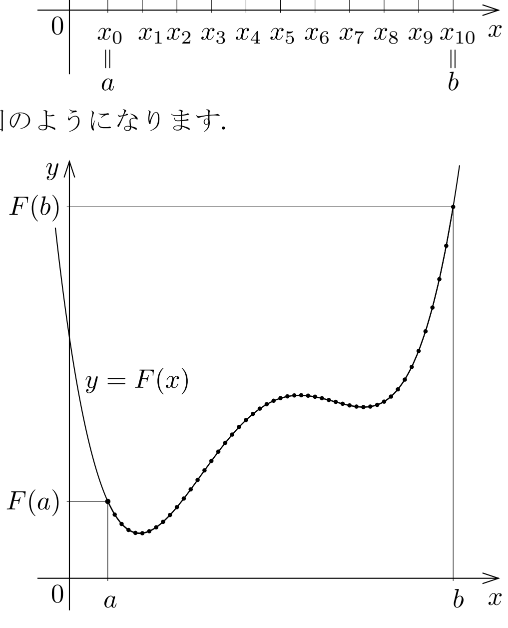
である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとります．$n\to\infty$ のとき $\delta_n=\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_1,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとします．自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$y=F(x)$ のグラフの点 $\bigl(\xi_k,F(\xi_k)\bigr)$ における接線において要素の点の x 座標の範囲を区間 $[x_{k-1},x_k]$ に制限した線分を考えます；更にこれらの線分を上下に平行移動させて，一つに繋いだ折れ線を L_n を作ります．L_n の左端の点は $\bigl(a,F(a)\bigr)$ にします．$n=3$ のときの折れ線 L_3 は例えば次の図のようになります．



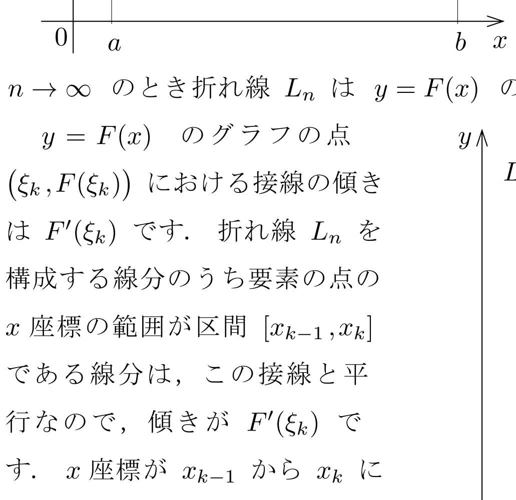


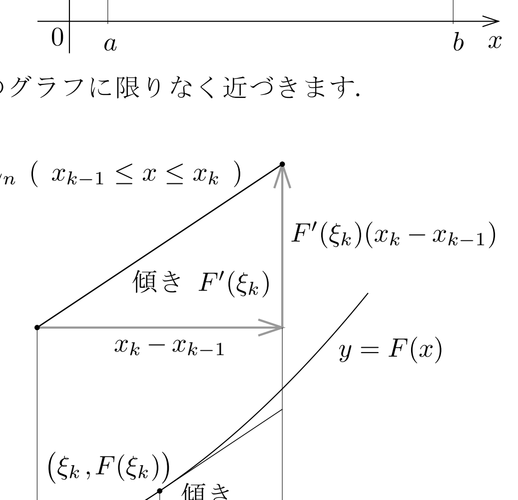
$n=5$ のときの折れ線 L_5 及び $n=10$ のときの折れ線 L_{10} は例えば次の図のようになります．





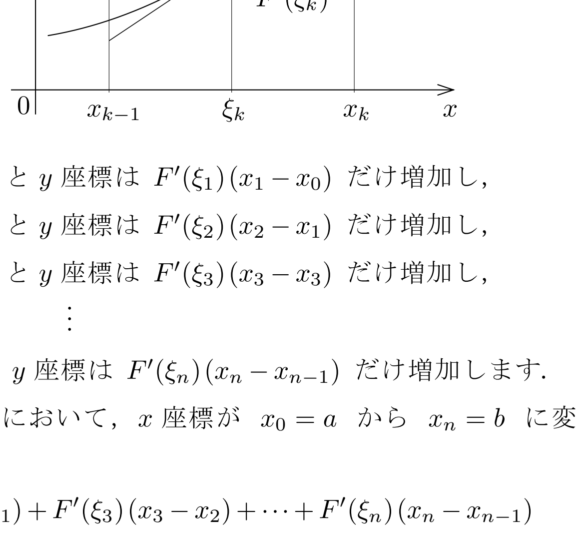
n を大きくしていくと折れ線 L_n は次の図のようになります．





$n\to\infty$ のとき折れ線 L_n は $y=F(x)$ のグラフに限りなく近づきます．

　$y=F(x)$ のグラフの点 $\bigl(\xi_k,F(\xi_k)\bigr)$ における接線の傾きは $F'(\xi_k)$ です．折れ線 L_n を構成する線分のうち要素の点の x 座標の範囲が区間 $[x_{k-1},x_k]$ である線分は，この接線と平行なので，傾きが $F'(\xi_k)$ です．x 座標が x_{k-1} から x_k に変わるとき，x 座標の増分は x_k-x_{k-1} なので，y 座標の増分は $F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ です．



折れ線 L_n において，

　　x 座標が x_0 から x_1 に変わると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1-x_0)$ だけ増加し，
　　x 座標が x_1 から x_2 に変わると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2-x_1)$ だけ増加し，
　　x 座標が x_2 から x_3 に変わると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3-x_3)$ だけ増加し，
　　　　　　　　　　　　$\vdots$
　x 座標が x_{n-1} から x_n に変わると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ だけ増加します．

これらを総て併せます．折れ線 L_n において，x 座標が $x_0=a$ から $x_n=b$ に変わると，y 座標は

$$\begin{aligned}&F'(\xi_1)(x_1-x_0)+F'(\xi_2)(x_2-x_1)+F'(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+F'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\ =&\sum_{k=1}^{n}\{F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\end{aligned}$$

だけ増加します．この y 座標の増加量を S_n とおきます．折れ線 L_n において，x 座標が a から b に変わると，y 座標は $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ だけ増加します．折れ線 L_n の左端の点が $\bigl(a,F(a)\bigr)$ なので，L_n の右端の点は $\bigl(b,F(a)+S_n\bigr)$ です．$n\to\infty$ のとき，折れ線 L_n は限りなく $y=F(x)$ のグラフに近づくので，L_n の右端の点 $\bigl(b,F(a)+S_n\bigr)$ は $y=F(x)$ のグラフの点 $\bigl(b,F(b)\bigr)$ に限りなく近づきます．よって $\lim_{n\to\infty}\{F(a)+S_n\}=F(b)$ ，$F(a)$ は定数なので $F(a)+\lim_{n\to\infty}S_n=F(b)$ ，故に

$$\lim_{n\to\infty}S_n = F(b)-F(a)\ .$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は F の導関数 F' のリーマン和であり，$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b F'(x)\,dx$ ．故に

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)\ .$$

このように考えると，次の微分積分の基本定理[6]が導かれます．微分積分の基本定理は，その名前のとおり，微分積分の最も基本となる定理です．その証明は後にします．

定理（微分積分の基本定理）　関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．a,b が属するある区間において，関数 F が微分可能で $F'(x)=f(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ .$$

　6.2 節で述べたように，定積分はリーマン和の極限値として定義されます．前節において定積分 $\int_2^5 x^2dx$ 及び $\int_3^8 2^xdx$ を定義に直接従ってリーマン和の極限値として計算しましたが，その計算はかなり面倒でした．しかし，微分積分の基本定理を用いると以下のように簡単に計算できます．

例　定積分 $\int_2^5 x^2dx$ を計算します．関数 F を $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ とおきます．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\Bigl(\frac{1}{3}x^3\Bigr) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2\ .$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_2^5 x^2dx = F(5)-F(2) = \frac{1}{3}5^3-\frac{1}{3}2^3 = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3} = 39\ .$$

終

例　定積分 $\int_3^8 2^xdx$ を計算します．関数 F を $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$ とおきます．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x\ln 2}{\ln 2} = 2^x\ .$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_3^8 2^xdx = F(8)-F(3) = \frac{2^8}{\ln 2}-\frac{2^3}{\ln 2} = \frac{256-8}{\ln 2} = \frac{248}{\ln 2}\ .$$

終

　関数の定積分をリーマン和の極限値として計算することは，ほとんどの場合とても面倒です．ところが，微分積分の基本定理によると，様々な関数の定積分がある程度統一的に計算できます．

例題　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を用いて，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ を計算する．

　余弦関数 $\cos x$ は，区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ において連続なので，0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である．$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0 = 1-0 = 1\ .$$

終

問題 6.4.1　$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$ であることを用いて，定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$ を計算しなさい．

例題　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1<x<1$ ）を用いて，定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を計算する．

　関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は，区間 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ において連続なので，$\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能である．$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1<x<1$ ）なので，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ .$$

終

問題 6.4.2　微分公式 $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$ （ $x\neq 0$ ）を用いて，定積分 $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$ を計算しなさい．

問題 6.4.3　微分公式 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$ を用いて，定積分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を計算しなさい．

　関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とします．更に，I の各実数 x に対して，F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとします．微分積分の基本定理より $\int_a^x F'(t)\,dt=F(x)-F(a)$ なので，

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt+F(a)\ .$$

つまり，関数 F の導関数 F' を定積分すると，元の関数 F の値を求めることができます．この意味で，積分は微分の逆の操作になります．

　微分積分の基本定理を証明するために 5.2 節で述べた平均値の定理を用います．

　平均値の定理　実数 p と q とについて $p<q$ で，関数 F が区間 $[p,q]$ で微分可能であるならば，次のような実数 ζ がある：$F(q)-F(p)=F'(\zeta)(q-p)$ かつ $p<\zeta<q$ ．

　微分積分の基本定理を証明します．実数 a と b とについて $a<b$ のときを考えます．関数 f が実数 a から実数 b まで定積分可能であるとします．更に，区間 $[a,b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x)=f(x)$ と仮定します．等式 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ を導きます．

　正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ をとり，δ_n を次のように定めます：

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_2,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\}\ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とします．

　自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1}<x_k$ で，f は区間 $[x_{k-1},x_k]$ で微分可能なので，平均値の定理より次のような実数 ξ_k があります：

$$F(x_k)-F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad かつ \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k\ .$$

実数 ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので，仮定より $F'(\xi_k)=f(\xi_k)$ ，従って

$$F(x_k)-F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\ .$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\{F(x_k)-F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ とおきます．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}\ .$$

$a=x_0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<x_3<\cdots<x_{n-1}<\xi_n<x_n=b$ なので，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は f のリーマン和です．また，$x_n=b$ かつ $x_0=a$ なので，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}\\ &= F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+F(x_3)-F(x_2)+F(x_4)-F(x_3)+\cdots\\ &\qquad +F(x_{n-2})-F(x_{n-3})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+F(x_n)-F(x_{n-1})\\ &= -F(x_0)+F(x_n) = F(x_n)-F(x_0)\\ &= F(b)-F(a)\ ,\end{aligned}$$

よって，f のリーマン和 S_n について，

$$S_n = F(b)-F(a)\ .$$

関数 f は a から b まで定積分可能であり，$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，$n\to\infty$ のとき f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束します：$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx$ ．故に，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\{F(b)-F(a)\} = F(b)-F(a)\ .$$

こうして微分積分の基本定理（の主要部分）が証明されました．

---

[6] ニュートン・ライプニッツの定理ともいわれます．ニュートンは 17 世紀のイギリスの物理学者・数学者です．ライプニッツは 17 世紀ドイツの哲学者・数学者です．