

## §6.5 原始関数と不定積分

関数  $f$  は実数  $a$  から実数  $b$  まで積分可能であるとし、 $a, b$  が属する区間において  $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$  である関数  $F$  が見つければ、微分積分の基本定理より  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  ですから、定積分  $\int_a^b f(x) dx$  が計算できます。そこで、関数  $f$  の定積分を計算するために、 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$  である関数  $F$  を見つけることが重要になります。

関数  $f$  と  $F$  について、 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$  であるとき、 $F$  は  $f$  の**原始関数** (primitive function) であるといいます。つまり、関数  $f$  と  $F$  について、

$$F \text{ は } f \text{ の原始関数である} \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \\ \iff f \text{ は } F \text{ の導関数である}$$

このように、原始関数というのは導関数と逆の概念です。

**例**  $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$  ですから、関数  $x^3$  は関数  $3x^2$  の原始関数です。  $\frac{d}{dx}(x^3 + 2) = 3x^2$  ,  $\frac{d}{dx}(x^3 - \frac{7}{5}) = 3x^2$  ですから、関数  $x^3 + 2$  ,  $x^3 - \frac{7}{5}$  などやはり関数  $3x^2$  の原始関数です。任意の定数  $C$  に対して、 $\frac{d}{dx}(x^3 + C) = 3x^2$  ですから、関数  $x^3 + C$  は関数  $3x^2$  の原始関数です。逆に、 $3x^2$  の原始関数は  $x^3 + C$  ( $C$  は定数) となるものに限ります。 終

一般的に次の定理が成り立ちます (証明は後にします)。

**定理 6.5.1** 同じ区間を定義域とする関数  $f, F, G$  について、 $F$  が  $f$  の原始関数であるとき、

$$G \text{ が } f \text{ の原始関数である} \iff \text{ある定数 } C \text{ をとると } G(x) = F(x) + C$$

**例題** 関数  $\frac{1}{4}x^4$  は関数  $x^3$  の原始関数である:  $\frac{d}{dx}(\frac{1}{4}x^4) = x^3$  . 実数全体を定義域とする関数  $F(x)$  は関数  $x^3$  の原始関数であり  $F(2) = 7$  とする; このような関数  $F(x)$  を求める。

関数  $\frac{1}{4}x^4$  と関数  $F(x)$  とは共に関数  $x^3$  の原始関数なので、 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$  ( $C$  は定数) .  $F(2) = 7$  なので、 $\frac{1}{4} \cdot 2^4 + C = 7$  ,  $C = 3$  . 故に  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3$  . 終

**問題 6.5.1** 正弦関数  $\sin x$  は余弦関数  $\cos x$  の原始関数です:  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  . 実数全体を定義域とする次のような関数  $F(x)$  を求めなさい:  $F(x)$  は余弦関数  $\cos x$  の原始関数であり  $F(\frac{3\pi}{2}) = 4$  .

関数  $f$  の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x) dx$$

と書き表し、これを  $f(x)$  の**不定積分** (indefinite integral) といいます。  $f(x)$  の不定積分を求めることを  $f(x)$  を**積分する** (integrate) といい、積分される関数  $f(x)$  を被積分関数といいます。

**例** 関数  $x^2$  の原始関数は  $\frac{1}{3}x^3$  ,  $\frac{1}{3}x^3 + 5$  ,  $\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{7}$  など数多くありますが、そのうちのどれか一つを  $\int x^2 dx$  と書き表します<sup>7)</sup> . 関数  $\frac{1}{3}x^3$  も関数  $\int x^2 dx$  も関数  $x^2$  の原始関数なので、定理 6.5.1 より、

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は定数}) . \quad \text{終}$$

一般に、同じ区間を定義域とする関数  $f$  と  $F$  について、 $f(x)$  の不定積分  $\int f(x) dx$  は  $f(x)$  の原始関数なので、定理 6.5.1 より、 $F$  が  $f$  の原始関数であるとき

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数}) .$$

ここで現われる定数  $C$  を**積分定数**といいます。

以下の2つの定理が微分と不定積分との関係の基本になります。

**定理 6.5.2** 関数  $f$  の不定積分  $\int f(x) dx$  があるとき、

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) .$$

**証明** 関数  $f(x)$  の不定積分  $\int f(x) dx$  は  $f(x)$  の原始関数なので、 $\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$  . (証明終り)

**定理 6.5.3** 関数  $F$  が微分可能である区間において、

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

**証明** 関数  $F$  が区間  $I$  において微分可能であるとする。  $F$  の導関数を  $f$  とおく:  $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$  .  $F$  は  $f$  の原始関数である。関数  $f(x)$  の不定積分  $\int f(x) dx$  も  $f(x)$  の原始関数なので、定理 6.5.1 より、区間  $I$  において

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$  なので、 $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$  ( $C$  は積分定数) . (証明終り)

**例題** 次のことを示す: 関数  $x^3$  に対して  $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$  ( $C$  は積分定数) .

**方針** 関数  $F$  を  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$  とおいて、公式  $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$  ( $C$  は積分定数) に当てはめる。そのために  $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} (\frac{1}{4}x^4)$  を計算する。

**解答**

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4}x^4 \right) = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 .$$

よって、 $x^3 = \frac{d}{dx} (\frac{1}{4}x^4)$  なので、

$$\int x^3 dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4}x^4 \right) \right\} dx = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \text{ は積分定数}) . \quad \text{終}$$

**問題 6.5.2** 次のことを示しなさい: 関数  $\frac{1}{x^3}$  ( $x > 0$ ) に対して  $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$  ( $C$  は積分定数) .

**問題 6.5.3** 次のことを示しなさい: 関数  $\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) に対して  $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$  ( $C$  は積分定数) .

関数の不定積分はあるとは限りません。不定積分の存在について次の定理が成り立ちます。

**定理 6.5.4** 定義域が区間である関数  $f$  が連続であれば、 $f(x)$  の不定積分  $\int f(x) dx$  がある。

————— 定理 6.5.1 の証明

定理 6.5.1 を証明します。

関数  $f$  と  $F$  と  $G$  との定義域は同じ区間であるとし、 $F$  は  $f$  の原始関数であるとし、 $G$  が  $f$  の原始関数であるならば、 $G'(x) = f(x) = F'(x)$  , 定理 5.2.2 より、ある定数  $C$  をとると  $G(x) = F(x) + C$  . 逆に、ある定数  $C$  をとると  $G(x) = F(x) + C$  ならば、

$$G'(x) = \frac{d}{dx} G(x) = \frac{d}{dx} \{ F(x) + C \} = F'(x) = f(x) ,$$

よって  $G$  は  $f$  の原始関数です。故に

$$G \text{ が } f \text{ の原始関数である} \iff \text{ある定数 } C \text{ をとると } G(x) = F(x) + C$$

<sup>7)</sup>  $x^2$  の不定積分  $\int x^2 dx$  が関数  $x^2$  の原始関数のうちのどれであるかは決めません。

$\int x^2 dx$  は  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{28}{3}$  かもしれませんし、 $\frac{1}{3}x^3 - 8$  かもしれません。