

§6.6 不定積分の公式

いくつかの関数の不定積分を求めます。前節の定理 6.5.3 が重要になります。

例として、余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求めます。余弦関数 $\cos x$ の原始関数、つまり $\frac{d}{dx}F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば、定理 6.5.3 より次のようになります：

$$\int \cos x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数です： $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 。従って

$$\int \cos x dx = \int \left(\frac{d}{dx}\sin x \right) dx = \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

冪関数 x^{p+1} (p は定数) を微分すると $\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので、 $p \neq -1$ のとき、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right) = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}x^{p+1} = \frac{1}{p+1}(p+1)x^p = x^p.$$

このことを用いて、定理 6.5.3 より不定積分 $\int x^p dx$ が求められます：

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right) \right\} dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) (定理 3.6.3) なので、定理 6.5.3 より、

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{d}{dx}\ln|x| \right) dx = \ln|x| + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

問題 6.6.1 次のことを示しなさい： $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (C は積分定数)。

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします。 a を底とする指数関数 a^x の微分公式 $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ より、

$$\frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx}a^x = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x,$$

定理 6.5.3 より、

$$\int a^x dx = \int \left(\frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a} \right) dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

定数 a について $a > 0$ とします。変数 x の関数 $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ を微分します。変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおいて合成関数の微分法 (定理 3.5) を用います：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} &= \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}. \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = \sqrt{a^2}$ なので、

$$\frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

よって $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ なので、定理 6.5.3 より、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \left(\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} \right) dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

問題 6.6.2 次のことを示しなさい：定数 a について $a \neq 0$ のとき

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

このようにして以下の積分公式が導かれます。

(積分公式) 以下の公式において C は積分定数を表す。

$$\text{定数 } k \text{ に対して } \int k dx = kx + C.$$

$$\text{定数 } p \text{ に対して、 } p \neq 1 \text{ のとき } \int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して、 } a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して、 } a \neq 0 \text{ のとき } \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して、 } a > 0 \text{ のとき } \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

例題 不定積分 $\int x^3 dx$, $\int \frac{1}{y^2} dy$, $\int \sqrt{u} du$ を計算する。

冪関数の積分公式 $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ (p は定数で $p \neq 0$) (C は積分定数) に当てはめる。

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy = \frac{1}{-2+1}y^{-2+1} + C = -\frac{1}{y} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C \quad (C \text{ は積分定数}). \quad \square$$

問題 6.6.3 以下の不定積分を計算しなさい。

$$(1) \int \frac{1}{x^4} dx.$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

例題 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する。

積分公式 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a は定数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$) (C は積分定数) に当てはめる。指数法則より $e^{3x} = (e^3)^x$ なので、

$$\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C \quad (C \text{ は積分定数}). \quad \square$$

問題 6.6.4 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}} dx$ を計算しなさい。

例題 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する。

積分公式 $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ (a は定数で $a \neq 0$) (C は積分定数) に当てはめる。積分定数を C とおく。

$$\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{1}{y^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}} dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C. \quad \square$$

問題 6.6.5 以下の不定積分を計算しなさい。

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy.$$

$$(2) \int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du.$$

関数の定義域と積分定数

関数 $\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) の不定積分は次のようになりました：

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正確にいうとこれは間違いです。

不定積分の公式を導くために公式 $\int \left\{ \frac{d}{dx}F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) を用いましたが、これは、関数 F が微分可能である区間において成り立つ等式でした。関数 $-\frac{1}{x}$ は区間 $(0, \infty)$ において微分可能ですから、区間 $(0, \infty)$ において

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} dx = -\frac{1}{x} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

更にまた、関数 $-\frac{1}{x}$ は区間 $(-\infty, 0)$ において微分可能ですから、区間 $(-\infty, 0)$ において

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} dx = -\frac{1}{x} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$

従って、不定積分 $\int \frac{1}{x^2} dx$ は正確に述べると次のようになります：

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{x} + C_2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}).$$

例えば、関数 $F(x)$ ($x \neq 0$) を

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 5 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{x} - 3 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると、 $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$ ですから、 $F(x)$ も $\frac{1}{x^2}$ の原始関数です。つまり、関数 $-\frac{1}{x}$ は 0 において微分可能でないので、不定積分 $\int \frac{1}{x^2} dx$ は $x > 0$ のときと $x < 0$ のときでは積分定数が異なることがあります。

同様に、関数 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分を正確に述べると次のようになります：

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}).$$