§6.9　定積分の性質

定積分に関する定理を幾つか述べます．

定理 6.9.1　k は定数とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $kf(x)$，$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$
$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad （複号同順）\ .$$

後でこの定理の一部を証明します．

例題　定積分 $\displaystyle\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する．

〔解説〕

$$\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \int_2^6\frac{x}{8}\,dx+\int_2^6\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx + 7\int_2^6\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6 + 7[\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8}\frac{36-4}{2}+7(\ln 6-\ln 2)$$
$$= 2+7\ln 3 \ .$$

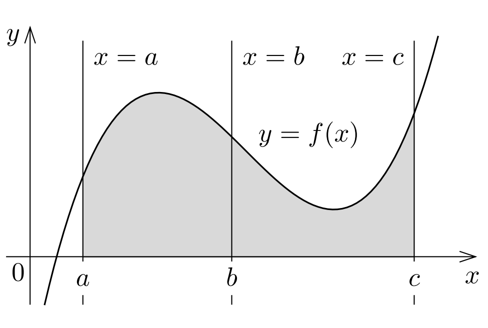
不定積分を計算してもよい．積分定数を C とおく．

$$\int\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \int\frac{x}{8}\,dx+\int\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int x\,dx+7\int\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}x^2+7\ln|x|+C$$
$$= \frac{x^2}{16}+7\ln|x|+C \ .$$

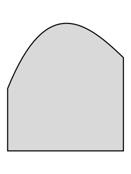
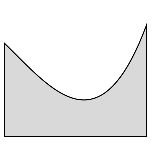
$$\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{16}+7\ln|x|\right]_2^6 = \frac{36}{16}+7\ln 6-\frac{4}{16}-7\ln 2 = \frac{9}{4}-\frac{1}{4}+7(\ln 6-\ln 2)$$
$$= 2+7\ln 3 \ .$$

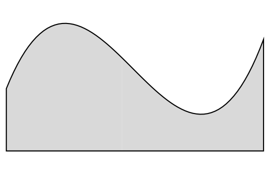
終

問題 6.9.1　定積分 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx$ を計算しなさい．



実数 a,b,c について $a\le b\le c$ とします．また，関数 f は a から c まで積分可能で，区間 $[a,c]$ の各実数 x で $f(x)\ge 0$ とします．右図のように，xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を，直線 $x=b$ で仕切ります．6.2 節で述べたように次のことが成り立ちます：

領域  の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ，　領域  の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

この 2 つの領域を併せた領域  の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$ ．

このことから次の等式が成り立つことが分かります：

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

実は，この等式は，実数 a,b,c の大小関係に関わらず成り立ちます．後に一部を証明します．

定理 6.9.2　実数 a,b,c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり，

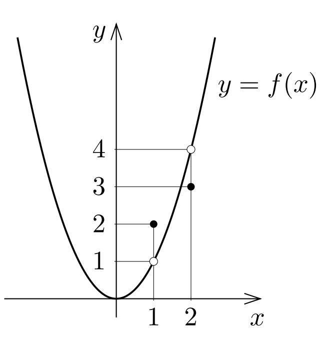
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \ .$$

次の定理が成り立ちます．その証明は後にします．

定理 6.9.3　実数 a と b とについて $a\le b$ で，関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする．区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

例解　関数 f を次のように定めます：



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\ x\ne 1 \text{ かつ } x\ne 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (\ x=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (\ x=2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

$x=1$ のときと $x=2$ のときだけ $f(x)\ne x^2$ ですが，それ以外のときは $f(x)=x^2$ です．このようなとき，定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは同じ値になります：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^3-0 = 9 \ .$$

終

一般的にいうと次のようになります：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1,c_2,c_3,\dots,c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，つまり，$a\le x\le b$ である実数 x について $x\ne c_1$ ，$x\ne c_2$ ，$x\ne c_3$ ，$\cdots$ ，$x\ne c_n$ のとき $g(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ ．証明は省略します．

定理 6.9.4　実数 a と b とについて $a\le b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする．関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，g は a から b まで積分可能であり，$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ ．

例題　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (\ x\ne 2 \text{ のとき}) \\ 5 & (\ x=2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する．

$0\le x\le 4$ である各実数 x について $x\ne 2$ のとき $g(x)=3^x$ なので，定理 6.9.4 により $\int_0^4 g(x)\,dx=\int_0^4 3^x\,dx$ ．$\int_0^4 3^x\,dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x\,dx = \left[\frac{e^x}{\ln 3}\right]_0^4 = \frac{e^4-1}{\ln 3} \ .$$

故に $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,dx=\frac{e^4-1}{\ln 3}$ ．

終

問題 6.9.2　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & (\ x\ne 2 \text{ のとき}) \\ 7 & (\ x=2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算しなさい．

例題　関数 f について，$3<x<7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする．定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する．

$3\le x\le 7$ である各実数 x について，$x\ne 3$ ，$x\ne 7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ なので，定理 6.9.4 より $\int_3^7 f(x)\,dx=\displaystyle\int_3^7\frac{1}{x}\,dx$ ．よって，

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7\frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_3^7 = \ln 7-\ln 3 = \ln\frac{7}{3} \ .$$

終

問題 6.9.3　関数 f について，$0<x<\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)=\sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とします．定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算しなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x\le 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (\ x>5 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx$ を計算する．

〔解説〕　定理 6.9.2 より $\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx=\int_0^5\psi(x)\,dx+\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx$ ．$\int_0^5\psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx$ を計算する．$0\le x\le 5$ である各実数 x について $\psi(x)=\cos x$ なので，

$$\int_0^5\psi(x)\,dx = \int_0^5\cos x\,dx = \big[\sin x\big]_0^5 = \sin 5-\sin 0 = \sin 5 \ .$$

$5\le x\le 2\pi$ である実数 x について $x\ne 5$ のとき $f(x)=\sin 5$ なので，

$$\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx = \int_5^{2\pi}\sin 5\,dx = (\sin 5)\int_5^{2\pi}1\,dx = (\sin 5)\big[x\big]_5^{2\pi} = (2\pi-5)\sin 5 \ .$$

従って，

$$\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx = \int_0^5\psi(x)\,dx+\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx = \sin 5+(2\pi-5)\sin 5$$
$$= (2\pi-4)\sin 5 \ .$$

終

問題 6.9.4　実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & (\ x\le 2 \text{ のとき}) \\ \cos 2 & (\ x>2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^\pi\varphi(x)\,dx$ を計算しなさい．

変数 x の関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を計算するためには，$f(x)\ge 0$ である x の値の範囲と $f(x)\le 0$ である x の値の範囲とに分けて定積分します．

例題　定積分 $\int_0^3|e^x-5|\,dx$ を計算する．

〔解説〕　$0\le x\le 3$ である実数 x について，$e^x-5=0$ とすると $x=\ln 5$ ．$0\le x\le\ln 5$ のとき，$e^x\le 5$ ，$e^x-5\le 0$ ，$|e^x-5|=5-e^x$ ．$\ln 5\le x\le 3$ のとき，$e^x\ge 5$ ，$e^x-5\ge 0$ ，$|e^x-5|=e^x-5$ ．これより，

$$\int_0^3|e^x-5|\,dx = \int_0^{\ln 5}(5-e^x)\,dx+\int_{\ln 5}^3(e^x-5)\,dx = [5x-e^x]_0^{\ln 5}+[e^x-5x]_{\ln 5}^3$$
$$= 5\ln 5-e^{\ln 5}+e^0+e^3-15-e^{\ln 5}+5\ln 5$$
$$= 5\ln 5-5+1+e^3-15-5+5\ln 5$$
$$= e^3+10\ln 5-24 \ .$$

終

問題 6.9.5　定積分 $\displaystyle\int_0^\pi\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算しなさい．

──── 定理の証明

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，定数 k に対して関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり，$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．

正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n=\sum_{k=1}^n\{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく；S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり，T_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和である．このとき，

$$T_n=\sum_{k=1}^n\{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=k\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=kS_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする．関数 $f(x)$ は実数 a から実数 b まで積分可能なので $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx$ ．故に，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}T_n = \lim_{n\to\infty}(kS_n) = k\lim_{n\to\infty}S_n = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり，$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．

正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n=\sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$
$$U_n=\sum_{k=1}^n[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

とおく；S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり，T_n は関数 $g(x)$ のリーマン和であり，U_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和である．このとき，

$$U_n=\sum_{k=1}^n[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]$$
$$=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}+\sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$=S_n+T_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a から実数 b まで積分可能なので，$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx$ ，$\lim_{n\to\infty}T_n=\int_a^b g(x)\,dx$ ．故に，

$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.2 の一部を大雑把に証明します：実数 a,b,c について $a\le b\le c$ であり，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \ .$$

証明　正の各実数 n に対して，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=c$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

とおく．S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和である．次のような正の自然数 l をとる：$l<n$ で，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{l-1}\le\xi_l\le x_l\le b \ ,$$
$$b\le\xi_{l+1}\le x_{l+1}\le\xi_{l+2}\le x_{l+2}\le\xi_{l+3}\le x_{l+3}\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=c \ .$$

$m=n-l$ ，$j=k-l$ とおく．$k=j+l$ ．変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n-l=m$ までの自然数である．x_l の値を b に替えることにして

$$T_l=\sum_{k=1}^l\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$
$$U_m=\sum_{k=l+1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{j=1}^m\{f(\xi_{l+j})(x_{l+j}-x_{l+j-1})\}$$

とおく．T_l は近似的に a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり，U_m は近似的に b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である．

$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^l\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}+\sum_{k=l+1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$=T_l+U_m \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする．関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので，

$$\lim_{l\to\infty}T_l=\int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \lim_{m\to\infty}U_m=\int_b^c f(x)\,dx \ .$$

$S_n=T_l+U_m$ なので，

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{l,m\to\infty}(T_l+U_m)=\lim_{l\to\infty}T_l+\lim_{m\to\infty}U_m$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.3 を証明します：実数 a,b について $a\le b$ で，関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとき，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a\le b$ で，関数 f,g は a から b まで積分可能であるとする．更に，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ とする．

正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n=\sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく；S_n は関数 f のリーマン和であり，T_n は関数 g のリーマン和である．$k=1,2,3,\dots,n$ に対して，ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので仮定より $f(\xi_k)\le g(\xi_k)$ ，更に $x_{k-1}\le x_k$ より $x_k-x_{k-1}\ge 0$ なので，

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \ ;$$

よって

$$\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \le \sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

つまり $S_n\le T_n$ ．

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする．正の各自然数 n について $S_n\le T_n$ なので，定理 5.6.3 より

$$\lim_{n\to\infty}S_n \le \lim_{n\to\infty}T_n \ .$$

関数 f,g は実数 a から実数 b まで積分可能なので，$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx$ ，$\lim_{n\to\infty}T_n=\int_a^b g(x)\,dx$ ；故に $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$ ．

（証明終り）