第6章の補遺4　もう一つの微分積分の基本定理

実数 a が属す区間 I において関数 f が連続であるとします．$f(x)$ の不定積分 $F(x)=\int f(x)\,dx$ があります．区間 I の各点 x に対して，f は a から x まで定積分可能です．6.4 節の微分積分の基本定理より，

$$\int_a^x f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^x = F(x)-F(a)\ .$$

これを微分します．$\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = \frac{d}{dx}F(x)-\frac{d}{dx}F(a) = f(x)\ .$$

つまり $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ ．

定理　実数 a が属す区間 I において，関数 f が連続であるならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\ .$$

この定理はここでは6.4 節の微分積分の基本定理を用いて証明しました．しかし，先にこの定理を証明して，この定理を用いて6.4 節の微分積分の基本定理を証明するやり方もあります．そのためこの定理も微分積分の基本定理といわれることがあります．

例　実数全体を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_0^x\sqrt{t^2+3}\,dt$ と定めます．F の導関数 F' を求めます．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{t^2+3}\,dt = \sqrt{x^2+3}\ .$$

問題 6.補遺4.1　正の実数の全体を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_1^x(\ln t)^3\,dt$ と定めます．F の導関数 F' を求めなさい．

例題　区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_0^{\sin x}\sin^{-1}t\,dt$ と定める．F の導関数 F' を求める．

変数 x について $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ とする．変数 y を $y=\sin x$ とおく．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sin^{-1}t\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^{y}\sin^{-1}t\,dt\ .$$

合成関数の微分法により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{y}\sin^{-1}t\,dt &= \frac{d}{dy}\int_0^{y}\sin^{-1}t\,dt\cdot\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}y\cdot\frac{d}{dx}\sin x\\ &= \sin^{-1}(\sin x)\cdot\cos x\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ なので $\sin^{-1}(\sin x)=x$ ．故に $F'(x)=x\cos x$ ．

問題 6.補遺4.2　区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_0^{\tan x}\tan^{-1}t\,dt$ と定めます．F の導関数 F' を求めなさい．

例題　変数 x の関数 $\int_0^x(\sin t^2+\sin x^2)\,dt$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}\sin x^2 = \cos x^2\cdot\frac{d}{dx}x^2 = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2\ .$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^x(\sin t^2+\sin x^2)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big(\int_0^x\sin t^2\,dt+\int_0^x\sin x^2\,dt\Big)\\ &= \frac{d}{dx}\int_0^x\sin t^2 dt+\frac{d}{dx}\Big\{(\sin x^2)\int_0^x 1\,dt\Big\}\\ &= \sin x^2+\frac{d}{dx}(x\sin x^2)\\ &= \sin x^2+\frac{d}{dx}x\cdot\sin x^2+x\cdot\frac{d}{dx}\sin x^2\\ &= \sin x^2+\sin x^2+x\cdot 2x\cos x^2\\ &= 2\sin x^2+2x^2\cos x^2\ .\end{aligned}$$

問題 6.補遺4.3　正の実数を表す変数 x の関数 $\int_1^x\ln\{x(t^2+1)\}\,dt$ を微分しなさい．