§7.0　微分

変数の微分という新しい概念を考えます．独立変数[1] x の微分とは新しい一つの変数 dx のことです．独立変数 x の微分 dx について $dx \neq 0$ とします．また，独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して，$\varphi(x)$ の微分 $d\varphi(x)$ を次のように定義します：

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

従って，従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおくと，y の微分 dy は次のようになります：

$$dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおきます．このとき，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ は次のようになりました：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x)}{\varDelta x} = \varphi'(x) \ .$$

つまり，$\dfrac{dy}{dx}$ は，分数と同じ形をしていますが，商 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ の極限値であって商ではありません．しかし，変数 x の微分 dx と変数 y の微分 dy とを考えると，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ はあたかも dy を dx で割るときの商であるかのように扱えます．このことを述べたのが次の定理です．

定理　独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して，従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおくとき，関数 f と g 及び微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$, 変数 x の微分 dx , 変数 y の微分 dy について，

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \ .$$

証明　$y = \varphi(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \ , \qquad dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx \ .$$

$g(y)\,\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ とする．$\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ なので，$g(y)\,\varphi'(x) = f(x)$ ；両辺に dx を掛けると $g(y)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$ ；$\varphi'(x)\,dx = dy$ なので，$g(y)\,dy = f(x)\,dx$.

逆に $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ とする．$dy = \varphi'(x)\,dx$ なので，$g(y)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$ ；独立変数 x について $dx \neq 0$ なので，$g(y)\,\varphi'(x) = f(x)$ ；$\varphi'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ なので，$g(y)\,\dfrac{dy}{dx} = f(x)$.　（証明終り）

---

[1] 関数 φ に対して $y = \varphi(x)$ となる変数 x, y を考えるとき，x を独立変数と，y を従属変数といいました．独立変数の値は私達が自由に決めることができますが，独立変数の値を決めると従属変数の値は自動的に決まってしまいます．