§7.1　不定積分の置換積分法

関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ の中に現われる dx は，元々の定義では，変数 x の微分 dx とは特に関係がありません．しかし実は，積分計算において，不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ の中に現われる dx は変数 x の微分 dx であるかのように扱うことができます．そのことを述べたのが次の定理です（証明は後にします）．

> **定理**（不定積分の置換積分法）　関数 f と g とは連続であり，関数 φ は微分可能であるとする．$y=\varphi(x)$ となる変数 x, y 及びそれらの微分 dx, dy について，
>
> $$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{ならば} \quad \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

この置換積分法の公式において次のことに注意して下さい：$f(x)$ は変数として x だけを含む（y を含まない）式であり，$g(y)$ は変数として y だけを含む（x を含まない）式である．

$\boxed{\text{例解}}$　3.5 節で述べたように，微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\frac{d}{dx}$ の分母の変数 x が sin の中身と一致するときです．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x \ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t \ .$$

一致　　　　一致

同様に，積分公式 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（$C$ は積分定数）を適用できるのは，cos の中身が積分変数であるときです．

$$\int \cos\boxed{x}\,d\boxed{x} = \sin x + C \ , \qquad \int \cos\boxed{y}\,d\boxed{y} = \sin y + C \ .$$

一致　　　　一致

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ を計算するには，このままでは積分公式 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ を適用できません．そこで次のようにして計算します．

変数 y を $y = 3x+2$ とおきます．$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので $dy = 3\,dx$，$dx = \frac{1}{3}\,dy$，よって

$$\cos(3x+2)\,dx = \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\cos y\,dy \ .$$

よって，積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)\,dx &= \int \frac{1}{3}\cos y\,dy = \frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \frac{1}{3}\sin y + C \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.1}}$　不定積分 $\int \sin(5x-4)\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する．

変数 z を $z = 2y+1$ とおく．$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので，$dz = 2\,dy$，$dy = \frac{1}{2}\,dz$，よって

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy &= \int \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz = \frac{7}{2}\int z^{-4}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{-3}z^{-3} + C = -\frac{7}{6z^3} + C \\ &= -\frac{7}{6(2y+1)^3} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.2}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する．

変数 v を $v = 5u+3$ とおく．$\frac{dv}{du} = 5$ なので，$dv = 5\,du$，$du = \frac{1}{5}\,dv$．よって

$$\frac{7}{5u+3}\,du = \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv = \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{5u+3}\,du &= \int \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\ln|v| + C \\ &= \frac{7}{5}\ln|5u+3| + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.3}}$　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{9}{4u+5}\,du$.　　　(2) $\int \sqrt{6x+5}\,dx$.

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する．

変数 x を $x = \frac{4t-5}{3}$ とおく．$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}$ なので，$dx = \frac{4}{3}\,dt$，$dt = \frac{3}{4}\,dx$．よって

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \cos x\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\cos x\,dx \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt &= \int \frac{3}{4}\cos x\,dx = \frac{3}{4}\int \cos x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + C \\ &= \frac{3}{4}\sin\frac{4t-5}{3} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.4}}$　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx$.　　　(2) $\int e^{2t+3}dt$.

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する．

変数 y を $y = x^2+1$ とおく．$\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \frac{1}{2}\,dy$．よって

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx &= \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}y^{-2} + C = -\frac{1}{4y^2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.5}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int \sin^3 t\cos t\,dt$ を計算する．

変数 x を $x = \sin t$ とおく．$\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t\,dt = dx$.

$$\sin^3 t\cos t\,dt = (\sin t)^3\cos t\,dt = x^3 dx \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \sin^3 t\cos t\,dt = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{1}{4}(\sin t)^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 t + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.6}}$　不定積分 $\int (\cos^2 t + 3)\sin t\,dt$ を計算しなさい．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求めます．$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ でした．変数 y を $y = \cos x$ とおきます．$\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$．よって

$$\tan x\,dx = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \frac{1}{y}(-dy) = -\frac{1}{y}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x\,dx = \int \left(-\frac{1}{y}\right)dy = -\int \frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C \ .$$

> （積分公式）
>
> $$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \quad (\, C \text{ は積分定数}) \ .$$

$\boxed{\text{問題 7.1.7}}$　不定積分 $\displaystyle\int \tan\frac{y}{3}\,dy$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する．

変数 y を $y = x^3-5$ とおく．$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dy$．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx &= \int \sqrt{x^3-5}\,x^2 dx = \int \sqrt{y}\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{x^3-5}^{\,3} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.8}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例}}$　置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算します．変数 y を $y = x+1$ とおきます．$\frac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので，積分定数を C_0 とおく．

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;$$

ここで，$C = \frac{1}{3} + C_0$ とおくと，$\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$；$C_0$ は定数ですから C も定数です．この定数 C を積分定数と考えると次のようになります：

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

このように，不定積分の計算結果に現れる定数項は積分定数に含めることができます．

———— 定理の証明

定理 7.1 を証明します．合成関数の微分公式（定理 3.5）を思い出して下さい：変数 y が変数 x の関数であるとき，$y = \varphi(x)$ となる関数 φ 及び関数 ψ が微分可能ならば，

$$\frac{d}{dx}\psi(y) = \frac{d}{dy}\psi(y)\cdot\frac{dy}{dx} \ .$$

関数 f と g とは連続であり，関数 φ は微分可能であるとします．関数 f, g は連続なので，定理 6.5.4 より，各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$，$\int g(y)\,dy$ があります．$y = \varphi(x)$ となる変数 x, y について，$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ と仮定します．合成関数の微分公式より

$$\frac{d}{dx}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = \frac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}\cdot\frac{dy}{dx} \ ,$$

定理 6.5.2 より $\frac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = g(y)$ なので

$$\frac{d}{dx}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ ,$$

仮定 $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ より $g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = f(x) \ .$$

従って

$$\int \left[\frac{d}{dx}\left\{\int g(y)\,dy\right\}\right]dx = \int f(x)\,dx \ .$$

定理 6.5.3 より $\displaystyle\int \left[\frac{d}{dx}\left\{\int g(y)\,dy\right\}\right]dx = \int g(y)\,dy + C$（$C$ は積分定数）なので，

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + C \quad (\, C \text{ は積分定数}) \ .$$

6.7 節で述べたようにこの等式の右辺の積分定数 C を不定積分の式 $\int g(y)\,dy$ に含めると，$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$．こうして定理 7.1 が証明できました．