§7.2　定積分の置換積分法

実数 a, b が属するある区間において，関数 φ は微分可能であり，関数 f は連続であるとします．また，実数 p, q が属するある区間において関数 g は連続であるとします．変数 x と y とについて $y=\varphi(x)$ とします．更に，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ で，$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$ とします．$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ なので，定理7.1より

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy\ .$$

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$ なので，

$$\Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} = \Big[\int g(y)\,dy\Big]_{y=p}^{y=q}\ ;$$

定理6.8より，

$$\Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)\,dx\ ,\qquad \Big[\int g(y)\,dy\Big]_{y=p}^{y=q} = \int_p^q g(y)\,dy\ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

定理（定積分の置換積分法）　実数 a と b とが属するある区間において，関数 φ は微分可能であり，関数 f は連続であるとする．更に，実数 p と q とが属するある区間において関数 g は連続であるとする．$y=\varphi(x)$ となる変数 x, y 及び各々の微分 dx, dy について，

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q g(y)\,dy\ .$$

定積分の置換積分では積分の上端と下端も変わることに注意して下さい．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y=2x+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac12 dy$ ．よって

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\frac12\,dy = \frac12\frac{1}{y^3}\,dy\ .$$

$y=2x+1$ より，$x=0$ のとき $y=1$，$x=4$ のとき $y=9$ ．従って，

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac12\frac{1}{y^3}\,dy = \frac12\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac12\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 = -\frac14\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9$$
$$= -\frac14\left(\frac{1}{81}-1\right) = \frac{20}{81}\ .$$

不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算してから微分積分の基本定理を適用しても計算できる：$\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4(2x+1)^2}+C$ （C は積分定数） なので，

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac14\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac14\left(\frac{1}{9^2}-\frac{1}{1^2}\right)$$
$$= \frac{20}{81}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.2.1}}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}dz$ ．よって

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz\ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より，$y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$，$y=5$ のとき $z=\pi$ ．従って，

$$\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{3}{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\big[-\cos z\big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$= \frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1+\frac12\right)$$
$$= \frac{9}{2\pi}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.2.2}}$ 以下の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$.　　(2) $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$.

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．

変数 y を $y=x^2+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac12 dy$ ．よって

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac12\,dy = \frac12\sqrt{y}\,dy\ .$$

$x=-1$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=5$ ．従って，

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_2^5 \frac12\sqrt{y}\,dy = \frac12\int_2^5 y^{\frac12}\,dy = \frac12\left[\frac23 y^{\frac32}\right]_2^5 = \frac13\Big[y\sqrt{y}\Big]_2^5$$
$$= \frac13\big(5\sqrt5-2\sqrt2\big)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.2.3}}$ 以下の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2}\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$.

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{3\pi} \frac{\sin t}{\cos t+4}\,dt$ を計算する．

変数 z を $x=\cos t+4$ とおく．$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$ より $\sin t\,dt=-dx$ ．$t=0$ のとき $x=\cos 0+4=5$，$t=3\pi$ のとき $x=\cos 3\pi+4=3$ ．従って，

$$\int_0^{3\pi} \frac{\sin t}{\cos t+4}\,dt = \int_0^{3\pi}\frac{1}{\cos t+4}\,\sin t\,dt = \int_5^3 \frac1x(-dx) = -\int_5^3 \frac1x\,dx = -\big[\ln x\big]_5^3$$
$$= -\ln 3+\ln 5 = \ln\frac53\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.2.4}}$ 定積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\sqrt{\sin t+2}\,dt$ を計算しなさい．