§7.4　有理関数の積分法

　分母と分子とが整式である分数で表せる式を有理式といいます．関数の値が独立変数の有理式で表されるとき，その関数を有理関数といいます．

　分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式といいます．分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき，

積分するためにはまずその分数式を整式と真分数式との和に分解する

ことが基本方針です．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので，

$$3x^2-4x+2=\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}\ .$$

$$\begin{array}{r|rrr} & \frac{3}{2}x & -\ \frac{5}{4} & \\ \hline 2x-1 & 3x^2 & -\ 4x & +\ 2 \\ & 3x^2 & -\ \frac{3}{2}x & \\ \hline & & -\ \frac{5}{2}x & +\ 2 \\ & & -\ \frac{5}{2}x & +\ \frac{5}{4} \\ \hline & & & \frac{3}{4} \end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-4x+2}{2x-1}&=\frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}}{2x-1}\\&=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ .\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx&=\int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx\\&=\int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx\ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$ ． 積分定数を C_0 とおく．

$$\int\frac{1}{2x-1}\,dx=\int\frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\ln|y|+C_0=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C_0\ .$$

故に，積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-4x+1}{2x-1}\,dx&=\int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx\\&=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}\ln|2x-1|+C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.4　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{3x}{2x+5}\,dx\ .$　　　　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx\ .$