

§ 7.5 有理関数の積分法

変数 x 及び定数 a, b, c, h, k ($a \neq 0$) に対して、分母が 2 次式である真分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分²⁾ を考えます。この不定積分の計算法は、 x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なります。

i) $b^2-4ac > 0$ のとき

変数 x の分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ (a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$) の不定積分で、 $b^2-4ac > 0$ のときを考えます。このとき、分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 つの 1 次式の積に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)B(x) \quad (A(x) \text{ と } B(x) \text{ とは } x \text{ の 1 次式で互いに素}).$$

そして更に、ある定数 p と q とをとると、 x に関する次の恒等式³⁾ が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}.$$

このような分式の変形を部分分数分解といいます。 $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{hx+k}{A(x)B(x)} &= \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \iff \frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) &= \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x) \\ \iff hx+k &= pB(x) + qA(x). \end{aligned}$$

従って、

$$\text{等式 } \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \text{ が恒等式である}$$

$$\iff \text{等式 } hx+k = pB(x) + qA(x) \text{ が恒等式である}.$$

そこで、等式 $hx+k = pB(x) + qA(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定めます。そのためには恒等式に関する次の性質を用います： x の高々 1 次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と (a, b, p, q は x と無関係な定数) について、

$$\text{等式 } ax+b = px+q \text{ が } x \text{ に関する恒等式である} \iff a=p \text{ かつ } b=q.$$

例題 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}.$$

更にその結果を用いて不定積分 $\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx$ を計算する。

【解説】 等式 $\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると、

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3),$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2);$$

右辺を整理すると

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b.$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は、 $a+b=9$, $-3a+2b=-7$. この方程式を解くと $a=5$, $b=4$. よって次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3}.$$

従って、

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x-3} dx.$$

変数 y を $y=x+2$ とおき、変数 z を $z=x-3$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$, $\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく。

$$\begin{aligned} 5 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x-3} dx &= 5 \int \frac{1}{y} dy + 4 \int \frac{1}{z} dz = 5 \ln|y| + 4 \ln|z| + C \\ &= 5 \ln|x+2| + 4 \ln|x-3| + C, \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx = 5 \ln|x+2| + 4 \ln|x-3| + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.1 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めなさい：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

更にその結果を用いて不定積分 $\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} dx$ を計算しなさい。

例題 不定積分 $\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx$ を計算する。

【解説】 $2x^2+7x-4 = (2x-1)(x+4)$ なので、ある定数 a, b をとると、 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+4}.$$

両辺に $2x^2+7x-4 = (2x-1)(x+4)$ を掛けると、

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4) + \frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4),$$

$$7x+10 = a(x+4) + b(2x-1),$$

$$7x+10 = (a+2b)x + 4a - b.$$

この等式が x に関する恒等式である条件は、 $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$. この方程式を解くと $a=3$, $b=2$. 従って、

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}.$$

よって、

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1} dx + \int \frac{2}{x+4} dx.$$

変数 y を $y=2x-1$ とおき、変数 z を $z=x+4$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$, $\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく。

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx = \int \frac{3}{2x-1} dx + \int \frac{2}{x+4} dx = \int \frac{3}{y} \frac{1}{2} dy + \int \frac{2}{z} dz$$

$$= \frac{3}{2} \ln|y| + 2 \ln|z| + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln|2x-1| + 2 \ln|x+4| + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.2 不定積分 $\int \frac{x-12}{2x^2+x-6} dx$ を計算しなさい。

ii) $b^2-4ac = 0$ のとき

変数 x の分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ (a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$) の不定積分で、 $b^2-4ac = 0$ のときを考えます。このとき、分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = lA(x)^2 \quad (l \text{ は定数で } A(x) \text{ は } x \text{ の 1 次式}).$$

高々 1 次の式 $hx+k$ を 1 次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数です：

$$hx+k = qA(x) + r.$$

これより、

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{qA(x)+r}{lA(x)^2} = \frac{qA(x)}{lA(x)^2} + \frac{r}{lA(x)^2} = \frac{q}{lA(x)} + \frac{r}{lA(x)^2}.$$

このような分式の変形も部分分数分解といいます。このような関数を積分するには変数 y を $y=A(x)$ とおいて置換積分します。

例題 不定積分 $\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1} dx$ を計算する。

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$. 整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので、 $6x-5 = 3(2x+1) - 8$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく。

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1} = \frac{3(2x+1)-8}{(2x+1)^2} = \frac{3y-8}{y^2} = \frac{3y}{y^2} - \frac{8}{y^2} = \frac{3}{y} - \frac{8}{y^2}.$$

$\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. 積分定数を C とおく。

$$\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1} dx = \int \left(\frac{3}{y} - \frac{8}{y^2} \right) \frac{1}{2} dy = 3 \int \frac{1}{y} dy - 4 \int y^{-2} dy$$

$$= \frac{3}{2} \ln|y| - 4(-y^{-1}) + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln|2x+1| + \frac{4}{2x+1} + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.3 不定積分 $\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1} dx$ を計算しなさい。

iii) $b^2-4ac < 0$ のとき

変数 x の分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ (a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$) の不定積分で、 $b^2-4ac < 0$ のときを考えます。このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成します：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2 + q \quad (p, q \text{ は定数}).$$

そして変数 y を $y=x+p$ とおいて置換積分をします。

例題 不定積分 $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} dx$ を計算する。

【解説】 被積分関数の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9.$$

変数 y を $y=x+1$ とおく。 $x=y-1$ なので、

$$\frac{3x+5}{x^2-2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9} + \frac{2}{y^2+9}.$$

$y=x+1$ より $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 従って

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} dx = \int \left(\frac{3y}{y^2+9} + \frac{2}{y^2+9} \right) dy = \int \frac{3y}{y^2+9} dy + \int \frac{2}{y^2+9} dy.$$

$z=y^2+9$ とおく。 $\frac{dz}{dy} = 2y$ なので $y dy = \frac{1}{2} dz$. 積分定数を C_1 とおく。

$$\int \frac{3y}{y^2+9} dy = \int \frac{3}{z} \frac{1}{2} dz = \frac{3}{2} \ln|z| + C_1 = \frac{3}{2} \ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2} \ln(y^2+9) + C_1.$$

また、積分定数を C_2 とおく。

$$\int \frac{2}{y^2+9} dy = 2 \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{y}{3} + C_2.$$

故に、積分定数を C とおくと

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{3y}{y^2+9} dy + \int \frac{2}{y^2+9} dy = \frac{3}{2} \ln(y^2+9) + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{y}{3} + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{x+1}{3} + C.$$

問題 7.5.4 不定積分 $\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13} dx$ を計算しなさい。

例題 不定積分 $\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9} dx$ を計算する。

【解説】 被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4) - 8 + 9 = 2(x-2)^2 + 1.$$

変数 y を $y=x-2$ とおく。 $x=y+2$ なので、

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1} = \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1}.$$

$y=x-2$ より $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 従って

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9} dx = \int \left(\frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \right) dy = \int \frac{3y}{2y^2+1} dy - \int \frac{5}{2y^2+1} dy.$$

$z=2y^2+1$ とおく。 $\frac{dz}{dy} = 4y$ なので $y dy = \frac{1}{4} dz$. 積分定数を C_1 とおく。

$$\int \frac{3y}{2y^2+1} dy = \int \frac{3}{z} \frac{1}{4} dz = \frac{3}{4} \ln|z| + C_1 = \frac{3}{4} \ln|2y^2+1| + C_1$$

$$= \frac{3}{4} \ln(2y^2+1) + C_1.$$

また、積分定数を C_2 とおく。

$$\int \frac{5}{2y^2+1} dy = \frac{5}{2} \int \frac{1}{y^2+\frac{1}{2}} dy = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C_2$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}y) + C_2.$$

故に、積分定数を C とおくと

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9} dx = \int \frac{3y}{2y^2+1} dy - \int \frac{5}{2y^2+1} dy$$

$$= \frac{3}{4} \ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}y) + C$$

$$= \frac{3}{4} \ln(2x^2-8x+9) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}\{\sqrt{2}(x-2)\} + C.$$

問題 7.5.5 不定積分 $\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7} dx$ を計算しなさい。

²⁾ 正確には“分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ で表される関数の不定積分”というべきですが、略して“分式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分”といいます。

³⁾ 文字 x の値が何であっても(両辺が値を持つ限り)成り立つ等式を x に関する恒等式といいました。