

## §7.7 1次式の根号を含む式の積分法

変数  $x$  の無理式  $\sqrt{ax+b}$  ( $a, b$  は定数で  $a \neq 0$ ) を含む式の積分には次のような置換積分を用います: 変数  $t$  を  $t = \sqrt{ax+b}$  とおくと,  $t^2 = \sqrt{ax+b}^2 = ax+b$  なので  $x = \frac{t^2-b}{a}$ ; 従って  $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{t^2-b}{a} = \frac{2}{a}t$  なので,  $dx = \frac{2}{a}t dt$ .

**例題** 不定積分  $\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する.

【解説】 変数  $t$  を  $t = \sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2 = 4x-9$  なので  $x = \frac{t^2+9}{4}$ .  $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}$  なので  $dx = \frac{t}{2} dt$ ,

$$\frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx = \frac{3}{\frac{t^2+9}{4} \cdot t} \cdot \frac{t}{2} dt = \frac{6}{t^2+9} dt.$$

積分定数を  $C$  とおく.

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx = \int \frac{6}{t^2+9} dt = \frac{6}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} + C = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{4x-9}}{3} + C. \quad \boxed{\text{終}}$$

**問題 7.7** 以下の不定積分を計算しなさい.

(1)  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx.$

(2)  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy.$