

第7章の補遺3 三角関数の累乗の積分

次の定理が成り立ちます。その証明は後にします。

定理 7.補遺3.1 実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする。 $n \geq 2$ である自然数 n に対して、

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

例題 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する。

【解説】 定積分の下端 0 及び上端 $\frac{3\pi}{2}$ は $\frac{\pi}{2}$ の整数倍なので、定理 7.補遺 3.1 を使うことができる。

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} .$$

従って、
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{16} .$$
 終

問題 7.補遺3.1 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x dx$ を計算しなさい。

例題 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する。

【解答】 定理 7.補遺 3.1 より、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 .$$

従って、
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{16}{15} .$$
 終

問題 7.補遺3.2 定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx$ を計算しなさい。

一般的に自然数 n に対する不定積分 $\int (\sin x)^n dx$, $\int (\cos x)^n dx$ を計算するためには次の定理を用います。その証明は後にします。

定理 7.補遺 3.2 各自然数 n に対して $S_n = \int (\sin x)^n dx$, $C_n = \int (\cos x)^n dx$ とおくと、 $n \geq 2$ となる自然数 n に対して次の漸化式が成り立つ：

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} ,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

————— 定理の証明

まず定理 7.補遺 3.2 を証明します。

各自然数 n に対して $S_n = \int (\sin x)^n dx$, $C_n = \int (\cos x)^n dx$ とおきます。 $n \geq 2$ とします。

漸化式 $S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \}$ を導きます。 $S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ と考えて部分積分します。 $\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$, $\int \sin x dx = -\cos x$ ですから、

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx = (\sin x)^{n-1} (-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x (-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{ (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n \} dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \} \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n , \end{aligned}$$

$(n-1)S_n$ を移項して整理すると

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x ,$$

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} .$$

同様の方法で漸化式 $C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \}$ を導きます。

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ と考えて部分積分します。 $\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$, $\int \cos x dx = \sin x$ ですから、

$$\begin{aligned} C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx = (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2} (-\sin x) \sin x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{ (\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n \} dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \} \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n , \end{aligned}$$

$(n-1)C_n$ を移項して整理すると

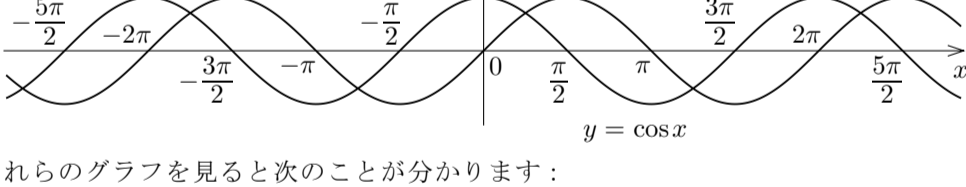
$$nC_n = (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x ,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

こうして定理 7.補遺 3.2 が証明されました。

定理 7.補遺 3.2 を用いて定理 7.補遺 3.1 を証明します。 xy 座標平面における

$y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフとを思い起こして下さい。



これらのグラフを見ると次のことが分かります：

実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば、 $\sin x = 0$ または $\cos x = 0$.

実数 a について $a = \frac{\pi}{2}l$ となる整数 l があるとします。このことより

$$\sin a = 0 \text{ または } \cos a = 0 .$$

実数 b について $b = \frac{\pi}{2}m$ となる整数 m があるとします。このことより

$$\sin b = 0 \text{ または } \cos b = 0 .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とします。 $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について、定理 7.補遺 3.2 より

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} = \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x .$$

従って、

$$[S_n]_a^b = \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b .$$

この等式の右辺は³⁾

$$\begin{aligned} \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b &= \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} \right]_a^b - \left[\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b \\ &= \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b , \end{aligned}$$

よって

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$ を計算します。 $\sin b = 0$ または $\cos b = 0$ なので、

$$(\sin b)^{n-1} \cos b = 0 .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので、

$$(\sin a)^{n-1} \cos a = 0 .$$

これらのことより

$$[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b = (\sin b)^{n-1} \cos b - (\sin a)^{n-1} \cos a = 0 ,$$

従って

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

ここで、

$$[S_n]_a^b = \left[\int (\sin x)^n dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx ,$$

$$[S_{n-2}]_a^b = \left[\int (\sin x)^{n-2} dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

故に

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

同様にして次の等式も導かれます：

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

こうして定理 7.補遺 3.1 が証明されました。

³⁾ 実数 a, b が関数 F, G の定義域に属するとき、 $[kF(x)]_a^b = k[F(x)]_a^b$ (k は定数) ,

$[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b$ (複号同順) .