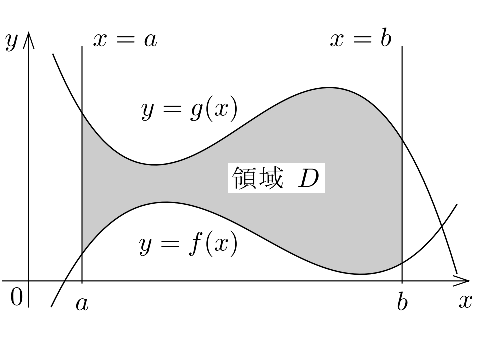
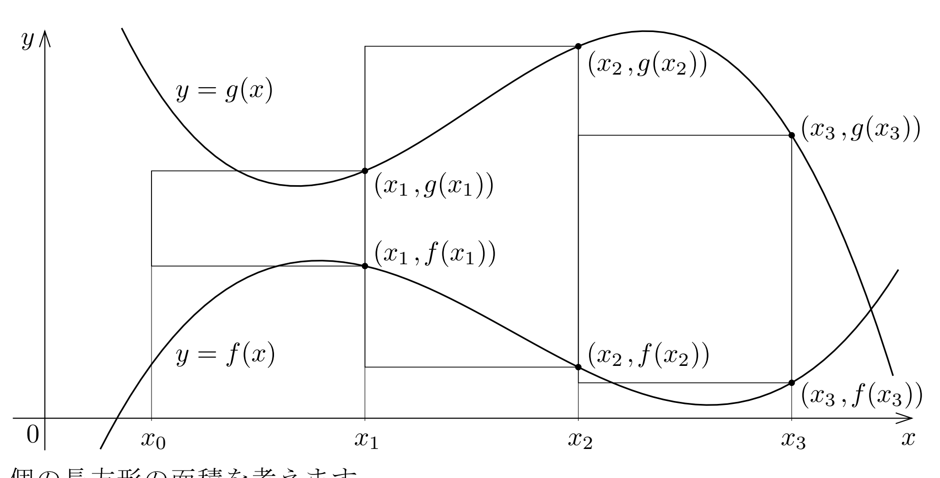
実数 a と b とについて $a \leq b$ とします．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とします．xy 座標平面において，連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

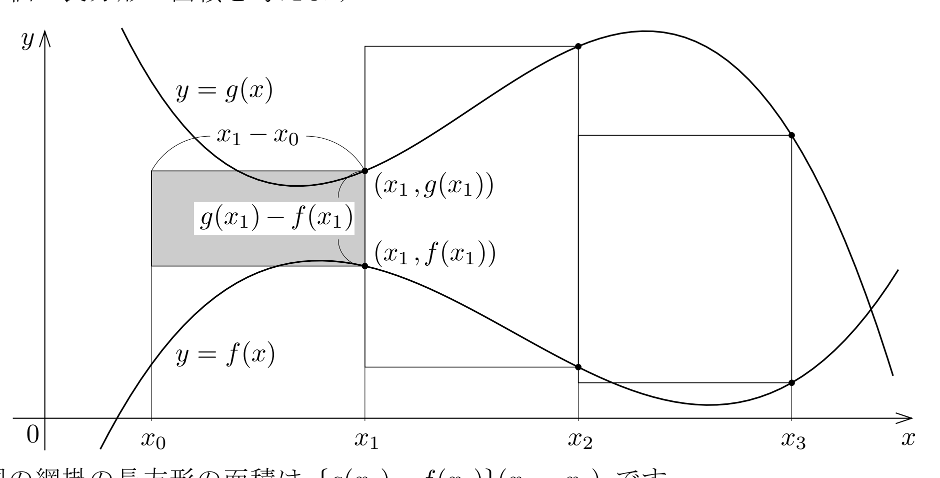
で表される領域 D の面積を考えます．



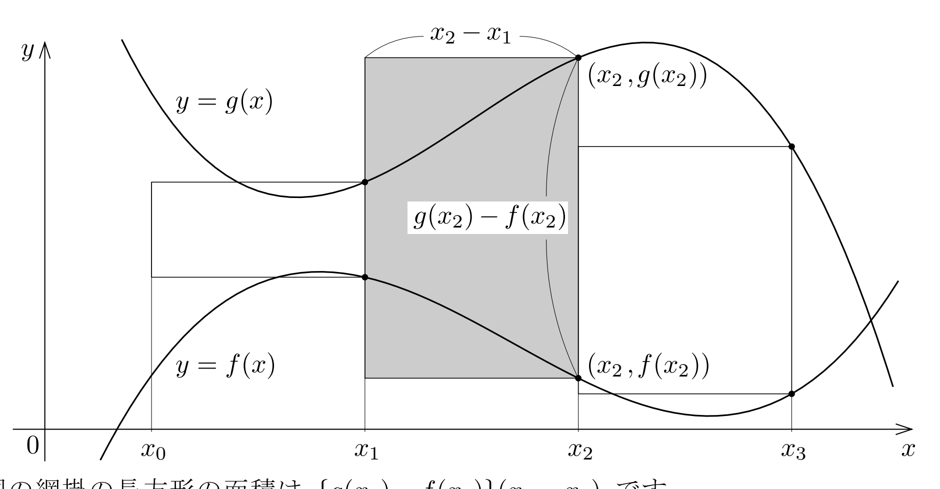
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 をとり，次の状況を考えます．



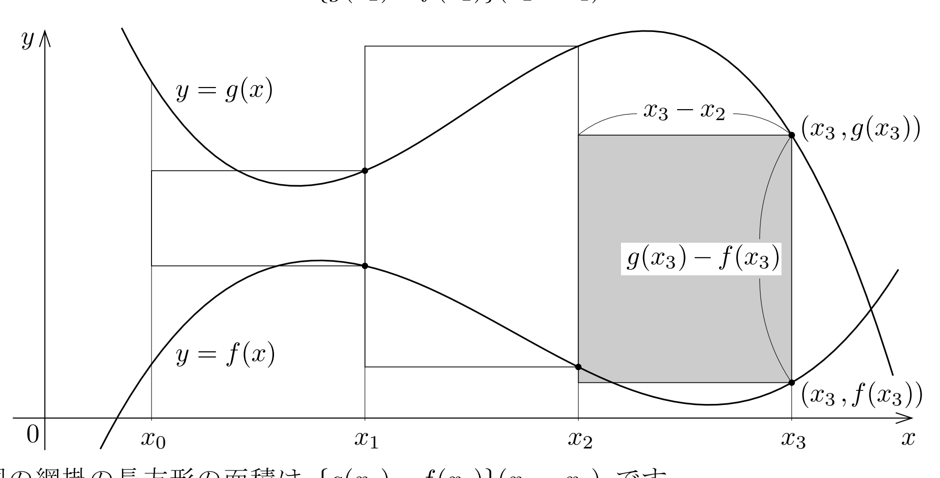
3 個の長方形の面積を考えます．



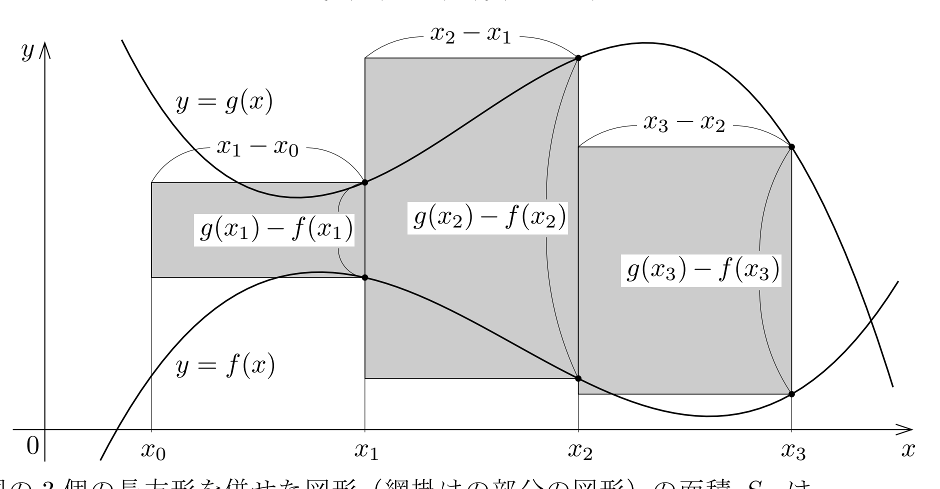
上図の網掛の長方形の面積は $\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)$ です．



上図の網掛の長方形の面積は $\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1)$ です．



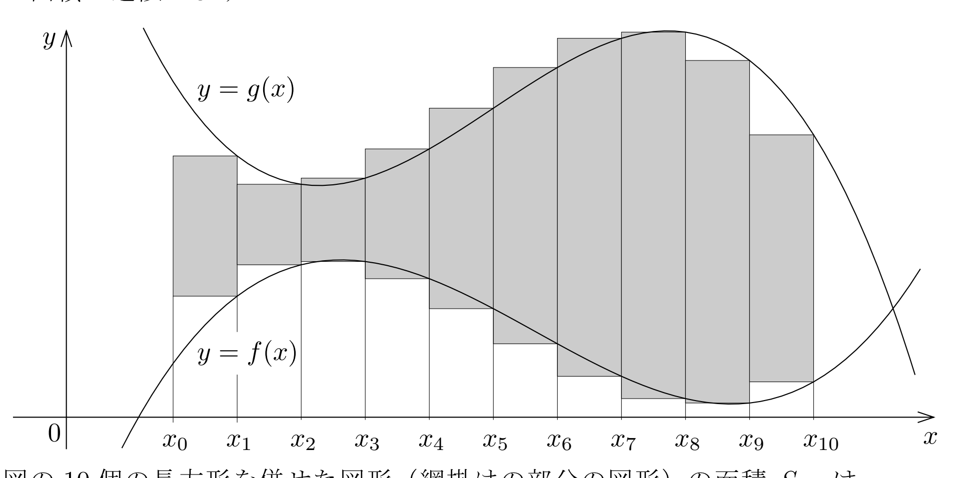
上図の網掛の長方形の面積は $\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$ です．



上図の 3 個の長方形を併せた図形（網掛けの部分の図形）の面積 S_3 は

$$S_3 = \{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

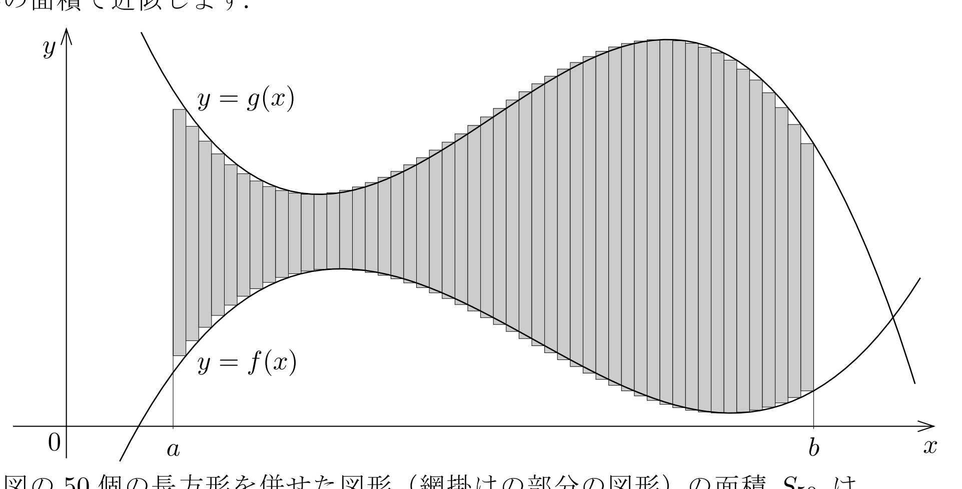
長方形の個数を 10 にします．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9 \leq x_{10} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9, x_{10}$ をとり，領域 D の面積を 10 個の長方形を併せた図形の面積で近似します．



上図の 10 個の長方形を併せた図形（網掛けの部分の図形）の面積 S_{10} は

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

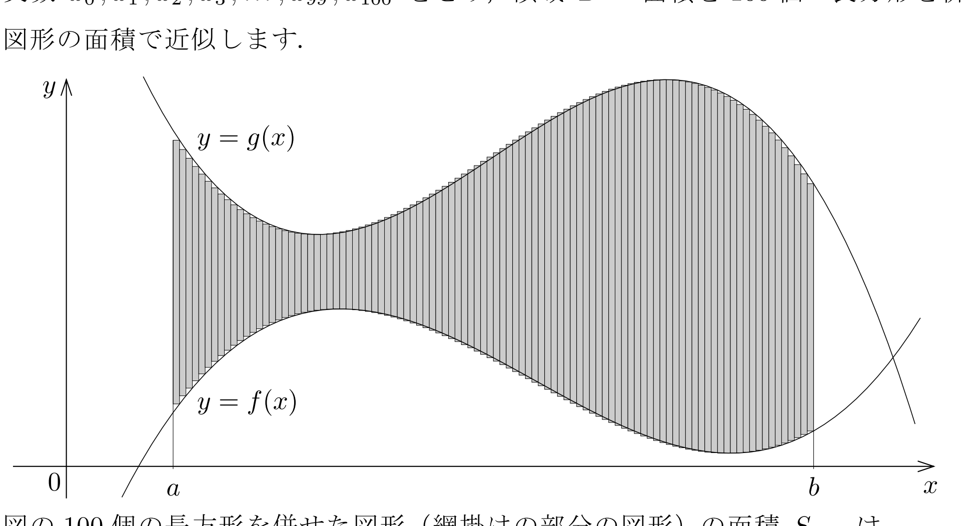
長方形の個数を 50 にします．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{49} \leq x_{50} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{49}, x_{50}$ をとり，領域 D の面積を 50 個の長方形を併せた図形の面積で近似します．



上図の 50 個の長方形を併せた図形（網掛けの部分の図形）の面積 S_{50} は

$$S_{50} = \sum_{k=1}^{50} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

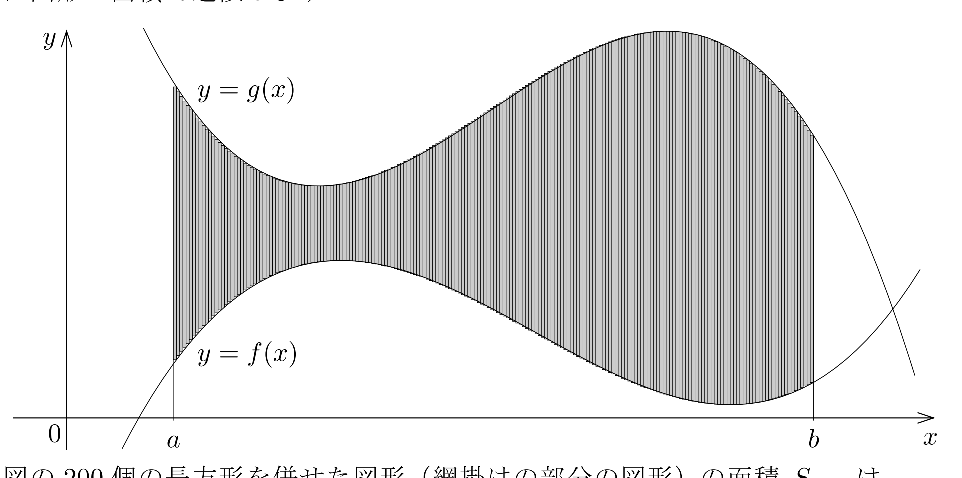
長方形の個数を 100 にします．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{99} \leq x_{100} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{99}, x_{100}$ をとり，領域 D の面積を 100 個の長方形を併せた図形の面積で近似します．



上図の 100 個の長方形を併せた図形（網掛けの部分の図形）の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

長方形の個数を 200 にします．$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{199} \leq x_{200} = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{199}, x_{200}$ をとり，領域 D の面積を 200 個の長方形を併せた図形の面積で近似します．



上図の 200 個の長方形を併せた図形（網掛けの部分の図形）の面積 S_{200} は

$$S_{200} = \sum_{k=1}^{200} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとります．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ .$$

$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とします．n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は $n \to \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づきます；よって領域 D の面積は S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ です．ここで $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和です．a から b まで，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが積分可能ですから，関数 $g(x) - f(x)$ も積分可能です（定理6.9.1）．よって，関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 S_n は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$ に収束します：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx \ .$$

故に，領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$ です．

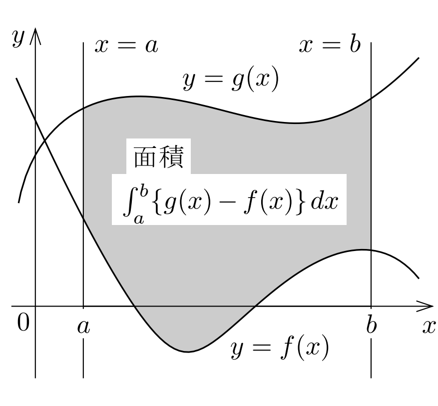
このようにして次の定理が成り立ちます．

定理 8.1　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx \ .$$

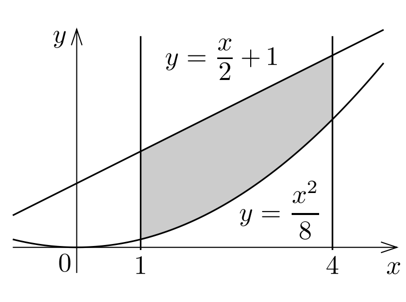


このように領域を長方形を併せた図形で近似して，長方形を限りなく増やしていくときに長方形を併せた図形の面積が領域の面積に収束すると考えて領域の面積を求める方法を区分求積法といいます．

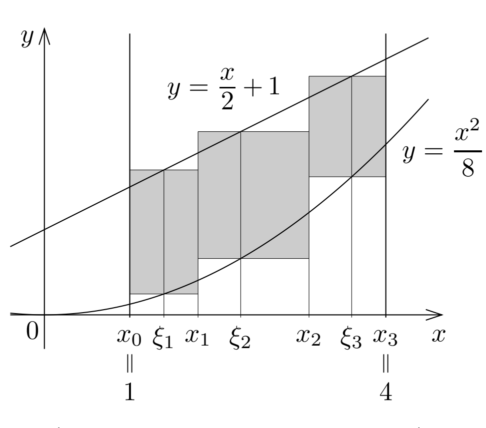
$\boxed{\text{問題 8.1.1}}$　xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \text{ かつ } \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

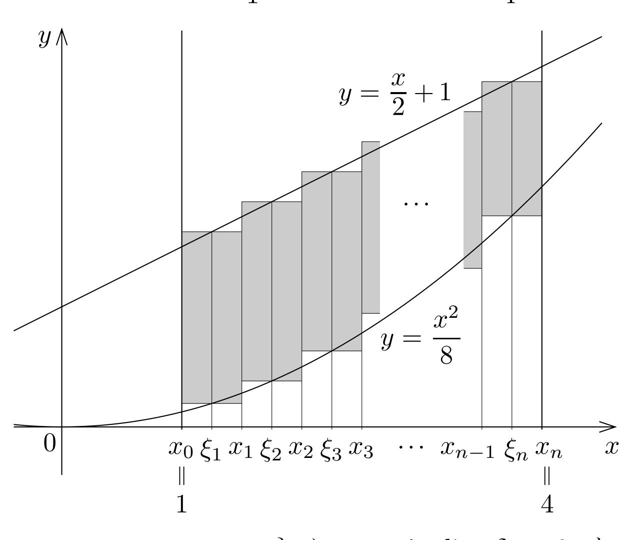
で表される領域 D の面積を求めます．



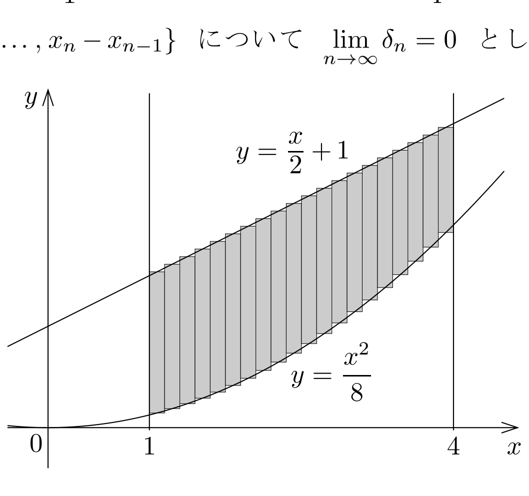
(1)　$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた3個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記しなさい．



(2)　変数 n を正の自然数とします．$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような網掛けされた n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記しなさい．またこの式を何というか記しなさい．



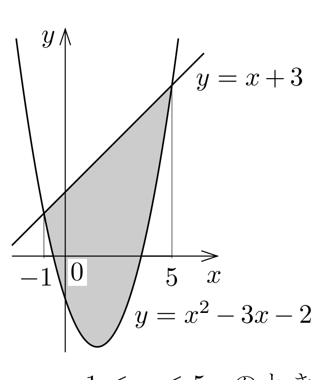
(3)　$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとします．$n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近づきます；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になります．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めなさい．



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．

〔解説〕 まず，$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．$x^2 - 3x - 2 = x + 3$ とすると，

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \ ,$$
$$(x+1)(x-5) = 0 \ ,$$
$$x = -1, 5 \ .$$



$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 つである．$-1 \leq x \leq 5$ のとき $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$ ．従って，$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5} \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\}\,dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5}$$
$$= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right)$$
$$= 36 \ .$$

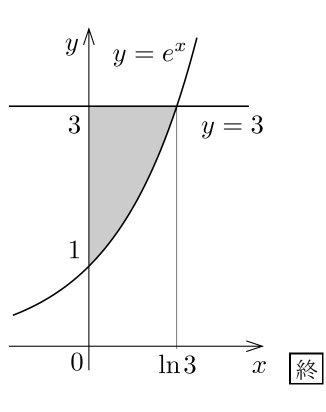
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.2}}$　xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．

〔解説〕 まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める．$y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると，$e^x = 3$ なので $x = \ln 3$ ．関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である．D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり，このとき $e^x \leq e^{\ln 3} = 3$ ．領域 D の面積は

$$\int_0^{\ln 3} (3 - e^x)\,dx = \left[3x - e^x\right]_0^{\ln 3} = 3\ln 3 - e^{\ln 3} - (-1)$$
$$= 3\ln 3 - 2 \ .$$

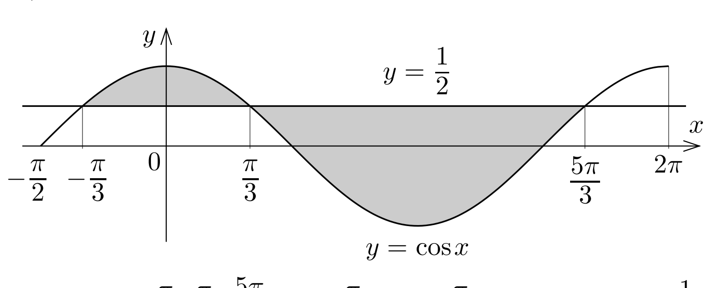


$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.3}}$　xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める．

まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める．$\cos x = \frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると，$x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ．$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ，$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \frac{1}{2}$ ．面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx$$
$$= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.4}}$　xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}\right)$ のグラフと直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めなさい．

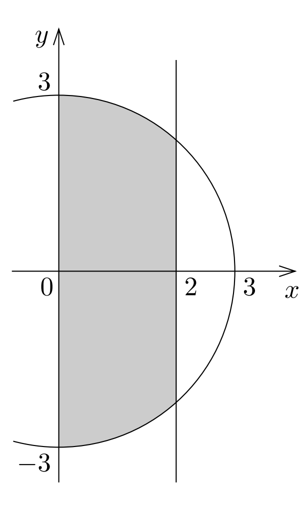
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．

〔解説〕 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ より，$y^2 \leq 9 - x^2$ なので，

$$-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \ .$$

従って，不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $0 \leq x \leq 2$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \left\{\sqrt{9 - x^2} - \left(-\sqrt{9 - x^2}\right)\right\}dx = \int_0^2 2\sqrt{9 - x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx \ .$$



$9 - x^2 \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$ ．変数 y を $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ とおく．$\sin y = \frac{x}{3}$ なので $x = 3\sin y$ ．$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos y \geq 0$ ．

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3\sin y)^2} = \sqrt{9(1 - \sin^2 y)} = 3\sqrt{\cos^2 y} = 3\cos y \ .$$

$x = 3\sin y$ より $\frac{dx}{dy} = 3\cos y$ なので $dx = 3\cos y\,dy$ ．$x = 0$ のとき $y = 0$ ．$x = 2$ のとき $y = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos y\, 3\cos y\,dy = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 y\,dy$$
$$= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1 + \cos 2y)\,dy = 9\left[y + \frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ により

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$a = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ とおく．$\sin a = \sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ なので，

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos a \geq 0$ なので，$\cos a = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，つまり

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

これらのことより

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{5} \ .$$

よって

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 9\sin^{-1}\frac{2}{3} \ .$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5} + 9\sin^{-1}\frac{2}{3}$ である．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.5}}$　xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ と $x \geq 3$ との連立で表される領域 D の面積を求めなさい．