

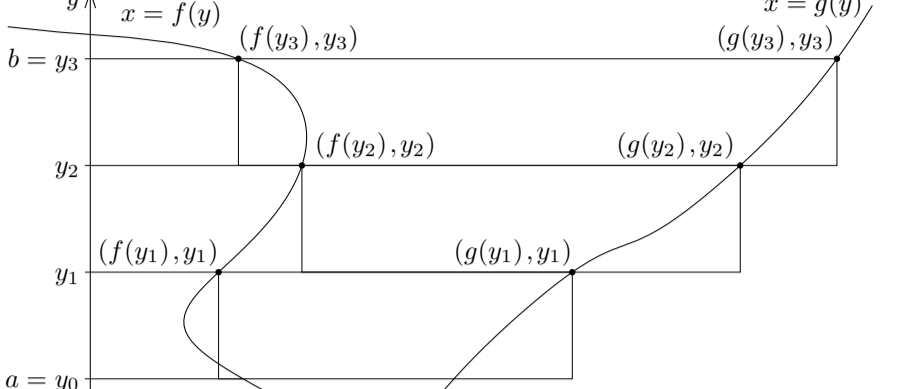
§8.2 平面図形の面積

実数 a と b について $a \leq b$ とします. また, 関数 f と g とは a から b まで積分可能であり, 区間 $[a, b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とします. xy 座標平面において, 連立不等式

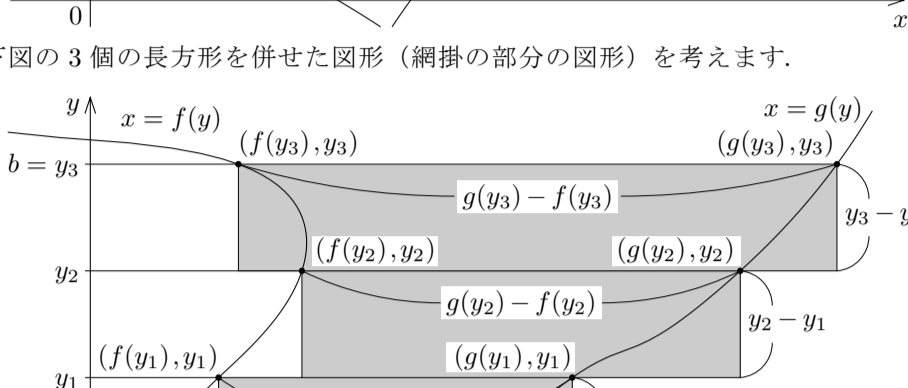
$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域を D の面積を考えます.

$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$ である実数 y_0, y_1, y_2, y_3 をとり, 下図の状況を考えます.



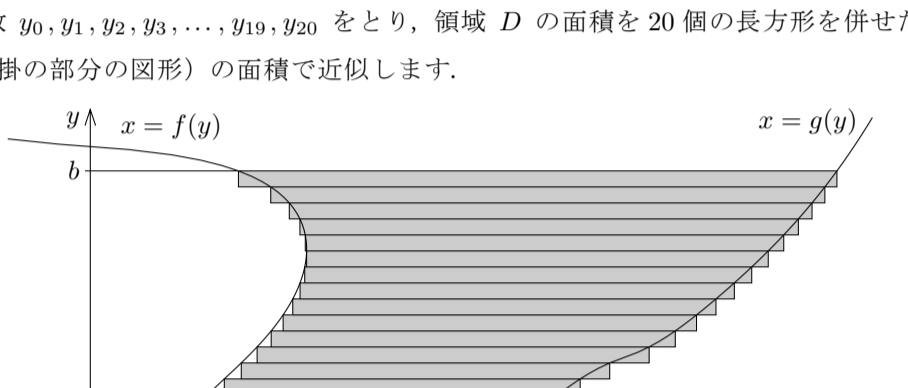
下図の3個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)を考えます.



上図の3個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)の面積 S_3 は

$$S_3 = \{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) \\ = \sum_{k=1}^3 \{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}).$$

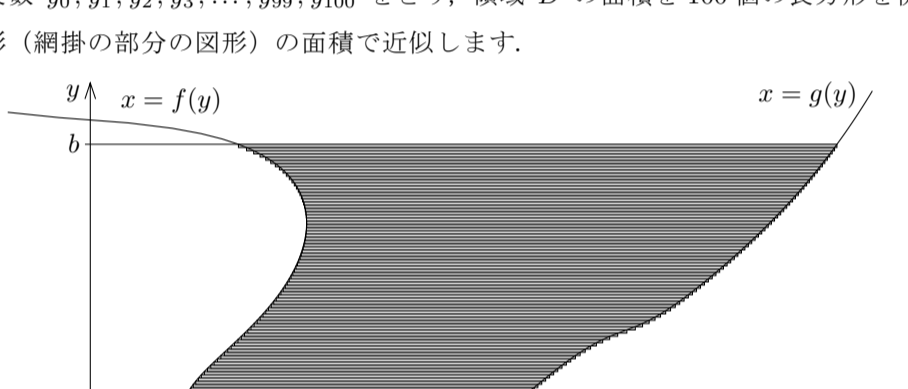
長方形の個数を20にします. $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{19} \leq y_{20} = b$ である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{19}, y_{20}$ をとり, 領域 D の面積を20個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)の面積で近似します.



上図の20個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)の面積 S_{20} は

$$S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}).$$

長方形の個数を100にします. $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{99} \leq y_{100} = b$ である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{99}, y_{100}$ をとり, 領域 D の面積を100個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)の面積で近似します.



上図の100個の長方形を併せた図形(網掛の部分の図形)の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}).$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$ をとります. これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}).$$

$\delta_n = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1}\}$ について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とします. n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は $n \rightarrow \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づきます; よって領域 D の面積は S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ です. ここで

$S_n = \sum_{k=1}^n \{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})$ は関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和です. a から b まで, 関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが積分可能ですから, 関数 $g(y) - f(y)$ も積分可能です(定理6.9.1). よって, 関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 S_n は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$ に収束します:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy.$$

故に, 領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$ です.

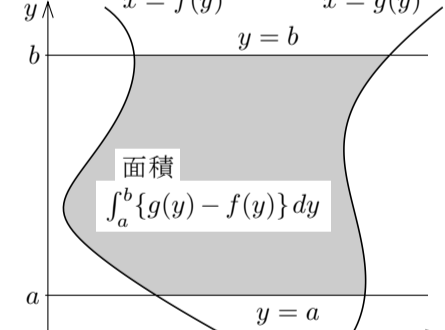
このようにして次の定理が導かれます.

定理8.2 実数 a と b について $a \leq b$ とする. また, 関数 f と g とは a から b まで積分可能であり, 区間 $[a, b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする. xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy.$$



例題 xy 座標平面において関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = x - 6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

【解説】 $x \geq 0$ のとき,

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \text{ かつ } y \geq 0,$$

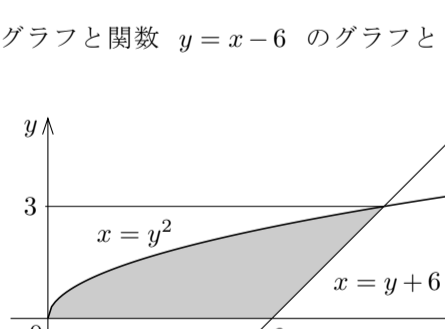
$$y = x - 6 \iff x = y + 6.$$

$x = y^2$ かつ $y \geq 0$ かつ $x = y + 6$ とすると, $y^2 = y + 6$, $y = 3, -2$; $y \geq 0$ なので $y = 3$. $0 \leq y \leq 3$ のとき $y + 6 \geq y^2$. 領域の面積は

$$\int_0^3 (y + 6 - y^2) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2}.$$

この面積を x について積分して求める計算は次のようになる.

$$\int_0^6 \sqrt{x} dx + \int_6^9 \{\sqrt{x} - (x - 6)\} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^6 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_6^9 = \frac{27}{2}. \quad \square$$



問題8.2.1 xy 座標平面において関数 $y = -\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = \frac{x}{2} - 4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

例題 xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

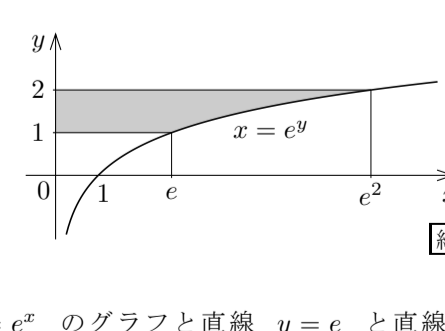
【解説】 $x > 0$ のとき,

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$. 各

実数 x について $e^x > 0$. 領域の面積は

$$\int_1^2 e^y dy = [e^y]_1^2 = e^2 - e.$$



問題8.2.2 xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

例題 xy 座標平面において $y = \tan^{-1}x$ のグラフと直線 $y = \frac{\pi}{3}$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

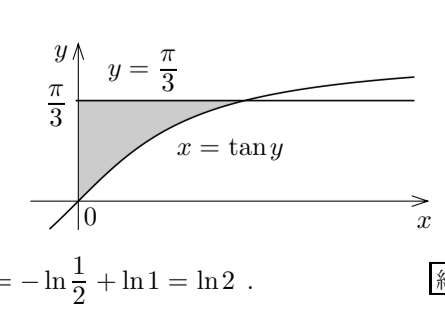
【解説】 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y.$$

領域の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$.

このとき $\tan y \geq 0$. 領域の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan y dy = [-\ln|\cos y|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2. \quad \square$$



問題8.2.3 xy 座標平面において関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.