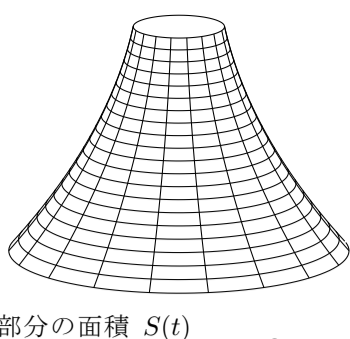
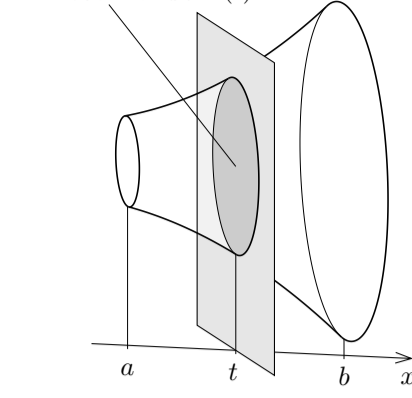


### §8.3 立体図形の体積

例として、右図のような立体図形  $V$  (中も詰まっているものとします) の体積を求めることを考えます。話を分かり易くするためにこの立体  $V$  は回転体であるとしします。



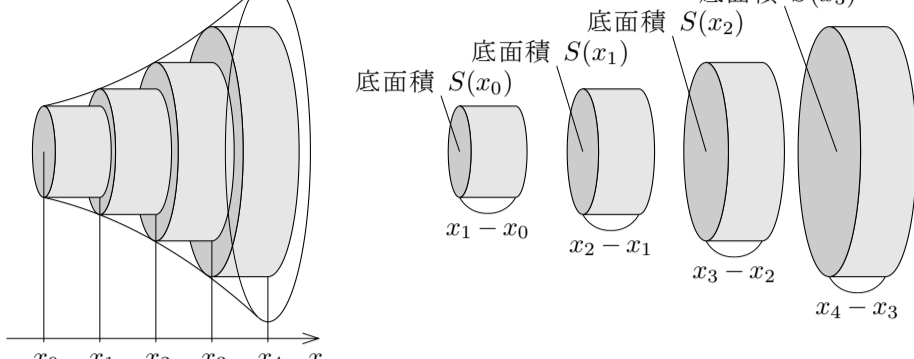
回転体  $V$  に対して、右下の図のように、 $V$  の中心軸と平行になるように  $x$  座標軸を設定します。回転体  $V$  に属す点の  $x$  座標うち、最小値を  $a$  と、最大値を  $b$  とおきます。更に、区間  $[a, b]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸の座標  $t$  の点を含み  $x$  軸に垂直な平面と立体  $V$  との共通部分である平面図形の面積を  $S(t)$  とおきます。この関数  $S$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとしします。



回転体  $V$  を直円柱の形の円盤を重ねた立体で近似します。

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  をとります。そして、次の図のように、4枚の円盤を重ねた立体で立体  $V$  を近似します。



このとき、4枚の円盤の体積の合計  $W_4$  は

$$W_4 = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ = \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

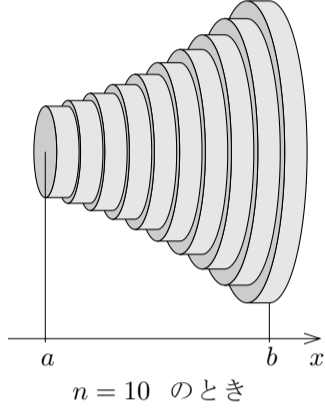
円盤の枚数を  $n$  とおきます。正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

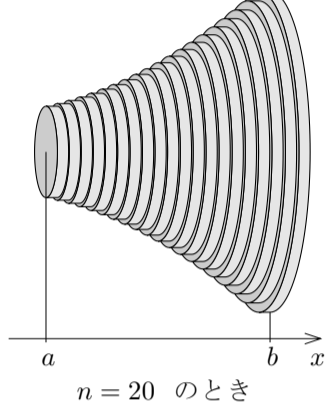
である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとります。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n \rightarrow 0$  としします。下図のように、 $n$  枚の円盤を重ねた立体で回転体  $V$  を近似します。



$n = 10$  のとき



$n = 20$  のとき

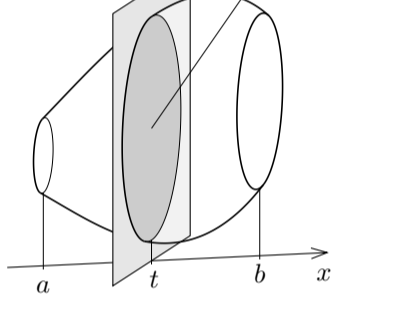
このとき、 $V$  の体積の近似値、つまり  $n$  枚の円盤の体積の合計  $W_n$  は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

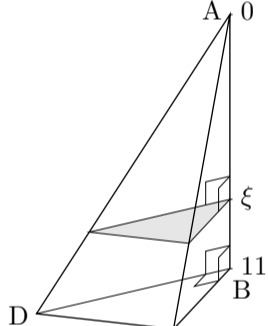
これは関数  $S$  のリーマン和です。円盤の枚数  $n$  を大きくすると近似の精度が高くなります。ですから、 $W_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$  が  $V$  の正確な体積になります。 $W_n$  は関数  $S$  のリーマン和ですから  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx$ 。従って、関数  $S$  の定積分  $\int_a^b S(x) dx$  が回転体  $V$  の体積になります。

回転体に限らず立体について一般的に次の定理が成り立ちます。

**定理 8.3** 立体  $V$  に対して  $x$  座標軸が設定されているとする。 $V$  に属す点の  $x$  座標のうち、最小値を  $a$  と、最大値を  $b$  とおく。区間  $[a, b]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸の座標  $t$  の点を含み  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の面積を  $S(t)$  とおく；この関数  $S$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとする。このとき、立体  $V$  の体積は  $\int_a^b S(t) dt$  である。

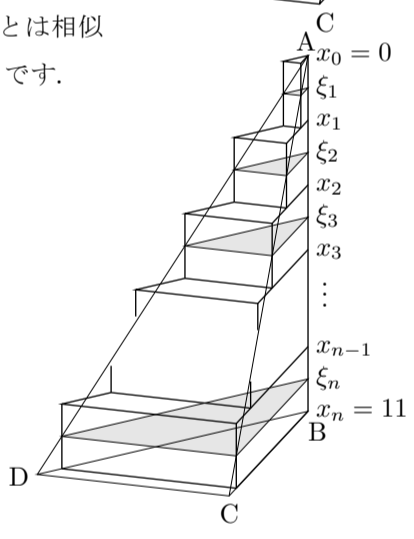


**問題 8.3.1** 空間内の4点  $A, B, C, D$  を頂点とする三角錐  $ABCD$  において、角  $ABC, ABD, CBD$  は直角であるとしします。 $\overline{AB} = 11$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $\overline{BD} = 8$  としします。この三角錐の体積を考えます。直角三角形  $BCD$  を底面としします。頂点  $A$  を原点とし、頂点  $A$  から頂点  $B$  への向きに座標軸をとります。この座標軸上で座標が  $\xi$  の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐  $ABCD$  との共通部分(右図の網掛けの部分)と直角三角形  $BCD$  とは相似であり、相似比は  $\xi : 11$  で、面積の比は  $\xi^2 : 11^2$  です。

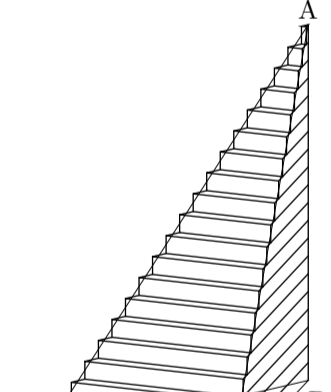


(1) 座標が  $\xi$  の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐  $ABCD$  との共通部分の面積を求めなさい。

(2) 変数  $n$  を正の自然数としします。 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$  である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  に対して、右図のように三角錐  $ABCD$  を  $n$  個の直三角柱(側面は底面及び上面と垂直)を併せた立体で近似します：この体積  $S_n$  を表す式を記しなさい。またこの式を何というか記しなさい。

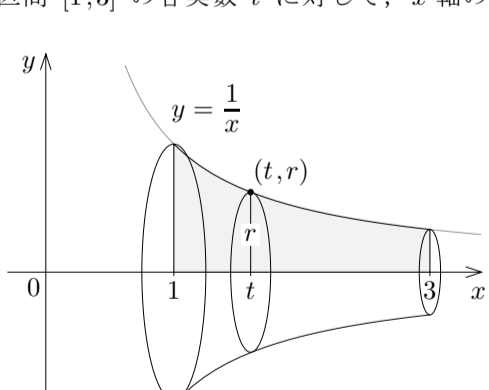


(3)  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  としします；つまり  $n \rightarrow \infty$  のとき  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  の間隔は総て  $0$  に近づくとしします。 $n \rightarrow \infty$  のとき薄い三角柱を併せた立体の体積  $S_n$  は右図のように三角錐  $ABCD$  の体積に限りなく近づきます；つまり  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が三角錐  $ABCD$  の体積になります。このことを用いて、定積分によって三角錐  $ABCD$  の体積を求めなさい。



**例題**  $xy$  座標平面において不等式  $1 \leq x \leq 3$  と  $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$  とで表される平面領域を考える。3次元空間においてこの平面領域を  $x$  軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める。

【解説】与えられた回転体を  $V$  とおく。区間  $[1, 3]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸の座標  $t$  の点を含み  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  をとの共通部分は円である；その半径を  $r$  とおくと、 $xy$  座標平面において点  $(t, r)$  は  $y = \frac{1}{x}$  のグラフに属するので、 $r = \frac{1}{t}$ ；よって、共通部分の面積  $S(t)$  は



$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2}.$$

従って、回転体  $V$  の体積は、

$$\int_1^3 S(t) dt = \int_1^3 \frac{\pi}{t^2} dt = \pi \int_1^3 t^{-2} dt = \pi [-t^{-1}]_1^3 = -\pi \left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\ = \frac{2\pi}{3}.$$

終

**問題 8.3.2**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と  $0 \leq y \leq e^x - 1$  とで表される平面領域を考えます。3次元空間においてこの平面領域を  $x$  軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

**例題**  $xy$  座標平面において楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  で囲まれる平面領域を、3次元空間において  $x$  軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める。

【解説】 $xy$  座標平面において楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  で囲まれる平面領域を  $x$  軸を中心に回転させてできる回転体を  $V$  とおく。 $1 - \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} \geq 0$  なので  $-3 \leq x \leq 3$ 。区間  $[-3, 3]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸の座標  $t$  の点を含み  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分は円である；その半径を  $r$  とおくと、 $xy$  座標平面において点  $(t, r)$  は楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  に属するので  $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$ 、

$$r^2 = 4 \left(1 - \frac{t^2}{9}\right);$$

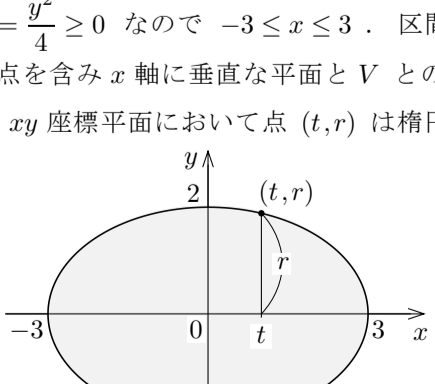
共通部分の面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \pi r^2 = 4\pi \left(1 - \frac{t^2}{9}\right).$$

故に回転体  $V$  の体積は、

$$\int_{-3}^3 S(t) dt = \int_{-3}^3 4\pi \left(1 - \frac{t^2}{9}\right) dt = 4\pi \left[t - \frac{t^3}{27}\right]_{-3}^3 = 4\pi \left\{3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27}\right)\right\} \\ = 16\pi.$$

終



**問題 8.3.3**  $xy$  座標平面において楕円  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  で囲まれる平面領域を、3次元空間において  $x$  軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい。