第8章の補遺3　座標空間における立体領域の体積

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.1}}$ V の各点 (x,y,z) について， $x^2+y^2 \leq 3$ なので， $x^2 \leq 3-y^2 \leq 3$ ， $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ． 区間 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と立体領域 V との共通部分を考える． 不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ と方程式 $y=t$ とより， $x^2+t^2 \leq 3$ ， $x^2 \leq 3-t^2$ ， $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \sqrt{3-t^2}$ ． 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \sqrt{3-t^2}$ ；この不等式は，xz 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{3-t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は $S(t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{3-t^2}\sqrt{3-t^2}=\dfrac{3-t^2}{2}$ ． 立体領域 V の体積は，

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(t)\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3-t^2}{2}\,dt = \left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{6}t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\ .$$

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.2}}$ V の各点 (x,y,z) について， $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2 \leq 6$ ． 区間 $[0,6]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える． 不等式 $x+y^2+z^2 \leq 6$ と方程式 $x=t$ とより， $t+y^2+z^2 \leq 6$ ， $y^2+z^2 \leq 6-t$ ；この不等式は，yz 座標平面において半径が $\sqrt{6-t}$ の円で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi\sqrt{6-t}^{\,2} = \pi(6-t)\ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^6 \pi(6-t)\,dt = \pi\left[6t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^6 = \pi\left(36-\frac{36}{2}\right) = 18\pi\ .$$

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.3}}$ V の各点 (x,y,z) について $0 \leq z \leq 3$ ． 区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $z=t$ と立体領域 V との共通部分を考える． 不等式 $x+y \leq e^z$ と方程式 $z=t$ とより， $x+y \leq e^t$ ． xy 座標平面において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x+y \leq e^t$ との連立で表される図形は，2辺の長さが e^t である直角二等辺三角形で囲まれる領域である． その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(e^t)^2 = \frac{e^{2t}}{2}\ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 \frac{e^{2t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^3 = \frac{e^6-1}{4}\ .$$