§0.0　区間

直感的にいうと，**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことである． 正確にいうと，実数の集合 I が区間であるとは I が次の条件を満たすことである：任意の実数 x, y, z について，x と y とが I に属しかつ $x < z < y$ ならば，z も I に属す.

実数 a と b とに対して，

$a \leq x \leq b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$ を $[a,b]$ と，
$a < x < b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid a < x < b \,\}$ を (a,b) と

書き表わす：

$$[a,b] = \{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}\ , \qquad (a,b) = \{\, x \mid a < x < b \,\}\ .$$

区間 $[a,b]$ には a も b も属す． 区間 (a,b) には a も b も属さない.

区間 $[a,b]$

区間 (a,b)

区間を表す記法 (a,b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x,y) と同じだが意味は異なるので注意すること.

次のような区間もある：実数 a, b について，

$$(a,b] = \{\, x \mid a < x \leq b \,\}\ , \qquad [a,b) = \{\, x \mid a \leq x < b \,\}\ .$$

区間 I について，I に属す実数を I の点ということがある.

解析学では，議論の便宜のために，2 つの仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用いる． $+\infty$ は**正の無限大**とよばれ，$-\infty$ は**負の無限大**とよばれる． 正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される． ∞ と $-\infty$ とは実数でない． ∞ 及び $-\infty$ に関する四則演算は全く定義されない． 大小関係について，正の無限大 ∞ はどんな実数よりも大きく，負の無限大 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束する；つまり，

$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad -\infty < x < \infty\ .$$

実数 a に対して，

a 以下の実数の全体 $\{\, x \mid x \leq a \,\}$ ，　a より大きい実数の全体 $\{\, x \mid x > a \,\}$

等も区間である． このような区間を，$\infty, -\infty$ [1] を用いて以下のように書き表わす：実数 a に対して，

$$(-\infty,a] = \{\, x \mid -\infty < x \leq a \,\} = \{\, x \mid x \leq a \,\}\ ,$$
$$[a,\infty) = \{\, x \mid a \leq x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \geq a \,\}\ ,$$
$$(-\infty,a) = \{\, x \mid -\infty < x < a \,\} = \{\, x \mid x < a \,\}\ ,$$
$$(a,\infty) = \{\, x \mid a < x < \infty \,\} = \{\, x \mid x > a \,\}\ .$$

例えば，区間 $[0,\infty)$ は 0 以上の実数全体であり，区間 $(0,\infty)$ は正の実数全体である.

更に，実数全体も 1 つの区間である． 実数全体を $\mathbf{R}$ と書き表す.

---

1) 区間とは実数の集合である． ∞ と $-\infty$ とは実数ではないので区間に属さない.