

§0.1 関数の概念

ある範囲の数の各々に対する数を唯一つ定める対応を**関数** (function) といい、元の数の範囲を**定義域** (domain) という。関数はより一般的に次のように定義される。

定義 集合 S を定義域とする関数とは、集合 S の要素の各々に対するものを唯一つ定める対応のことである。

関数はある種の対応であり、抽象的な概念であるが、数学では関数も一つの“もの”として扱う。関数をよく f とか g とか φ とか ψ とかの文字で表す。関数 f は定義域の各要素 a に対して唯一つのものを定める； a に対して f が定めるものを a における f の**値** (value) といい、 $f(a)$ と書き表す。関数 f を定めることは、 f の定義域を定めてその定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ を定めることである。

関数 f について、 f の定義域の要素 x における f の値 $f(x)$ の範囲を f の**値域** (range) という。

定義 関数 f の値域とは、 f の定義域の各要素 x に対する f の値 $f(x)$ の全体である。

関数 f そのものと、 f の値 $f(x)$ とは別のものである。しかし、しばしば、変数 x が現れる式 $f(x)$ に対して、 x に対して $f(x)$ を定める関数を“関数 $f(x)$ ”という。

関数 f の定義域の要素を表す変数を f の**独立変数**といい、独立変数 x の値に対する f の値 $f(x)$ を表す変数 y を f の**従属変数**という。つまり独立変数 x に対する f の従属変数は $y = f(x)$ となる変数 y のことである。独立変数 x に対する関数 f の従属変数を y とおくと、 “関数 $y = f(x)$ ” という。

特殊な関数として、関数の値が常に同じである関数を**定数関数** (constant function) という。つまり、関数 f が定数関数であるとは、 f の定義域の任意の要素 u と v とに対して $f(u) = f(v)$ となることである。

関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の1次式で表されるとき、 f を**1次関数**という。関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の2次式で表されるとき、 f を**2次関数**という。一般に、自然数 n に対して、関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の n 次式で表されるとき、 f を n 次関数という。関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の整式で表されるとき、 f を**有理整関数**という。つまり、定数関数、1次関数、2次関数、3次関数、…などを併せて有理整関数という。更に、関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の有理式で表されるとき、 f を**有理関数**という。

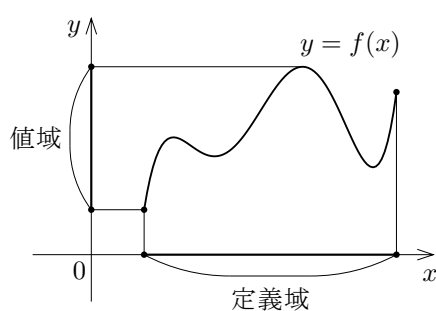
関数 f の**グラフ**とは、 x が定義域の要素で $f(x) = y$ である実数 x と y との順序対 (x, y) 全体

$$\{ (x, y) \mid x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y \}$$

である。よって、任意の実数 x と y について、

$$\text{順序対 } (x, y) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} \iff x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y .$$

関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおく： $y = f(x)$ 。独立変数 x は f の定義域の要素を表す変数なので、 f の定義域が x の値の範囲である。また、 f の値域は $f(x)$ の値つまり従属変数 y の値の範囲である。なので、 xy 座標平面において、



関数 f の定義域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の x 座標の範囲であり、

関数 f の値域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の y 座標の範囲である。

関数の f の**最大値** (maximum value) とは f の値域のなかで最も大きい実数のことであり、関数 f の**最小値** (minimum value) とは f の値域のなかで最も小さい実数のことである。正確に述べると次のようになる。

定義 関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

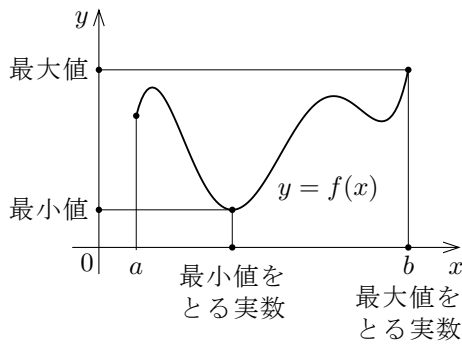
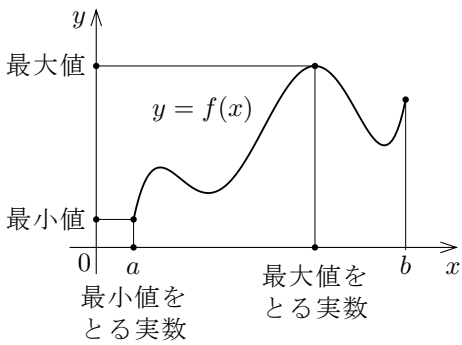
$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という。また、 f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という。

実数 a と b について $a < b$ とする。区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f のグラフにおいて、最大値・最小値は例えば次の図のようになる。



定義 関数 f の定義域は集合 S を含むとする。 S において f が**単調増加**であるとは、

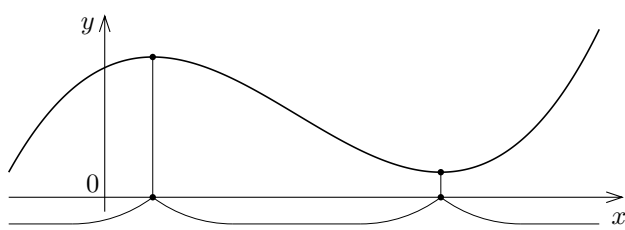
$$S \text{ の任意の実数 } u \text{ と } v \text{ について } u < v \text{ ならば } f(u) < f(v)$$

となることである。 f が定義域全体で単調増加であるとき、単に f は単調増加であるという。 S において f が**単調減少**であるとは、

$$S \text{ の任意の要素 } u \text{ と } v \text{ について } u < v \text{ ならば } f(u) > f(v)$$

となることである。 f が定義域全体で単調減少であるとき、単に f は単調減少であるという。

グラフで考えると例えば次のようになる。



この区間で単調増加 この区間で単調減少 この区間で単調増加