

## §0.1 関数の概念

ある範囲の数の各々に対する数を唯一つ定める対応を**関数** (function) といい、元の数の範囲を**定義域** (domain) という。関数はより一般的に次のように定義される。

**定義** 集合  $S$  を定義域とする関数とは、集合  $S$  の要素の各々に対するものを唯一つ定める対応のことである。

関数はある種の対応であり、抽象的な概念であるが、数学では関数も一つの“もの”として扱う。関数をよく  $f$  とか  $g$  とか  $\varphi$  とか  $\psi$  とかの文字で表す。関数  $f$  は定義域の各要素  $a$  に対して唯一つのものを定める；  $a$  に対して  $f$  が定めるものを  $a$  における  $f$  の**値** (value) といい、 $f(a)$  と書き表す。関数  $f$  を定めることは、 $f$  の定義域を定めてその定義域の各要素  $x$  における  $f$  の値  $f(x)$  を定めることである。

関数  $f$  について、 $f$  の定義域の要素  $x$  における  $f$  の値  $f(x)$  の範囲を  $f$  の**値域** (range) という。

**定義** 関数  $f$  の値域とは、 $f$  の定義域の各要素  $x$  に対する  $f$  の値  $f(x)$  の全体である。

関数  $f$  そのものと、 $f$  の値  $f(x)$  とは別のものである。しかし、しばしば、変数  $x$  が現れる式  $f(x)$  に対して、 $x$  に対して  $f(x)$  を定める関数を“関数  $f(x)$ ”という。

関数  $f$  の定義域の要素を表す変数を  $f$  の**独立変数**といい、独立変数  $x$  の値に対する  $f$  の値  $f(x)$  を表す変数  $y$  を  $f$  の**従属変数**という。つまり独立変数  $x$  に対する  $f$  の従属変数は  $y = f(x)$  となる変数  $y$  のことである。独立変数  $x$  に対する関数  $f$  の従属変数を  $y$  とおくと、 “関数  $y = f(x)$ ” という。

特殊な関数として、関数の値が常に同じである関数を**定数関数** (constant function) という。つまり、関数  $f$  が定数関数であるとは、 $f$  の定義域の任意の要素  $u$  と  $v$  とに対して  $f(u) = f(v)$  となることである。

関数  $f$  の値  $f(x)$  が変数  $x$  の1次式で表されるとき、 $f$  を**1次関数**という。関数  $f$  の値  $f(x)$  が変数  $x$  の2次式で表されるとき、 $f$  を**2次関数**という。一般に、自然数  $n$  に対して、関数  $f$  の値  $f(x)$  が変数  $x$  の  $n$  次式で表されるとき、 $f$  を  $n$  次関数という。関数  $f$  の値  $f(x)$  が変数  $x$  の整式で表されるとき、 $f$  を**有理整関数**という。つまり、定数関数、1次関数、2次関数、3次関数、…などを併せて有理整関数という。更に、関数  $f$  の値  $f(x)$  が変数  $x$  の有理式で表されるとき、 $f$  を**有理関数**という。

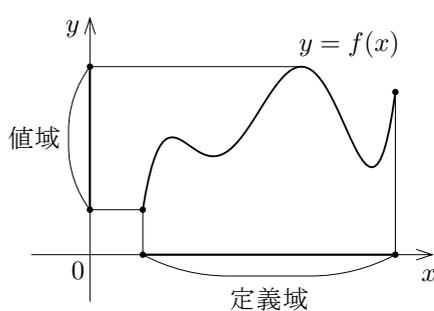
関数  $f$  の**グラフ**とは、 $x$  が定義域の要素で  $f(x) = y$  である実数  $x$  と  $y$  との順序対  $(x, y)$  全体

$$\{ (x, y) \mid x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y \}$$

である。よって、任意の実数  $x$  と  $y$  について、

$$\text{順序対 } (x, y) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} \iff x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y .$$

関数  $f$  の独立変数を  $x$  とおき従属変数を  $y$  とおく： $y = f(x)$ 。独立変数  $x$  は  $f$  の定義域の要素を表す変数なので、 $f$  の定義域が  $x$  の値の範囲である。また、 $f$  の値域は  $f(x)$  の値つまり従属変数  $y$  の値の範囲である。なので、 $xy$  座標平面において、



関数  $f$  の定義域は  $y = f(x)$  のグラフに属す点の  $x$  座標の範囲であり、

関数  $f$  の値域は  $y = f(x)$  のグラフに属す点の  $y$  座標の範囲である。

関数の  $f$  の**最大値** (maximum value) とは  $f$  の値域のなかで最も大きい実数のことであり、関数  $f$  の**最小値** (minimum value) とは  $f$  の値域のなかで最も小さい実数のことである。正確に述べると次のようになる。

**定義** 関数  $f$  の定義域に属す実数  $p$  について、 $f$  が  $p$  において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

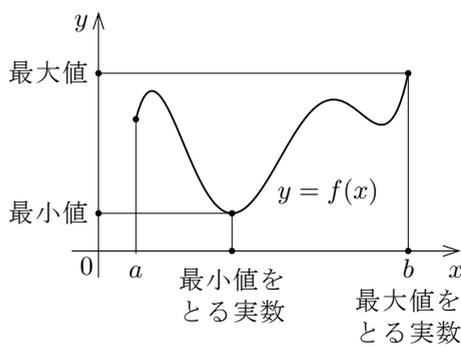
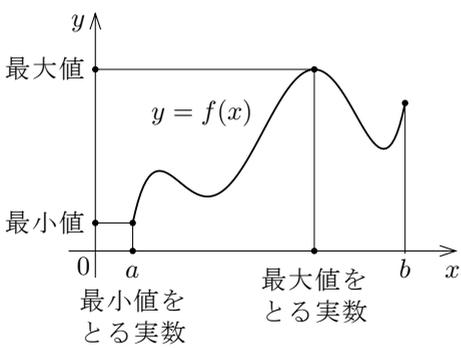
$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) ;$$

このとき  $f$  の値  $f(p)$  を  $f$  の最大値という。また、 $f$  が  $p$  において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) ;$$

このとき  $f$  の値  $f(p)$  を  $f$  の最小値という。

実数  $a$  と  $b$  について  $a < b$  とする。区間  $[a, b]$  を定義域とする関数  $f$  のグラフにおいて、最大値・最小値は例えば次の図のようになる。



**定義** 関数  $f$  の定義域は集合  $S$  を含むとする。 $S$  において  $f$  が**単調増加**であるとは、

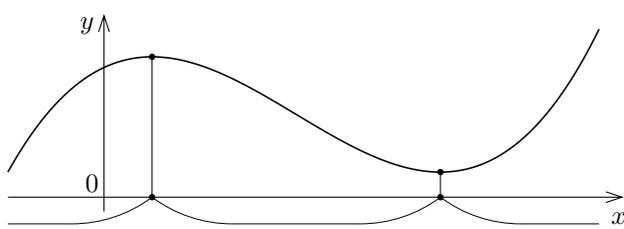
$$S \text{ の任意の実数 } u \text{ と } v \text{ について } u < v \text{ ならば } f(u) < f(v)$$

となることである。 $f$  が定義域全体で単調増加であるとき、単に  $f$  は単調増加であるという。 $S$  において  $f$  が**単調減少**であるとは、

$$S \text{ の任意の要素 } u \text{ と } v \text{ について } u < v \text{ ならば } f(u) > f(v)$$

となることである。 $f$  が定義域全体で単調減少であるとき、単に  $f$  は単調減少であるという。

グラフで考えると例えば次のようになる。



この区間で単調増加    この区間で単調減少    この区間で単調増加