§0.4　2 次関数

変数 x に対する関数 f の値 $f(x)$ が x の 2 次式で表されるような関数 f を **2 次関数** (quadratic function) という．つまり，関数 f が 2 次関数であるとは，変数 x について $f(x)=ax^2+bx+c$ （ a,b,c は定数で $a\neq 0$ ） となることである．

x の 2 次式は総て次の形に直せる：

$$a(x+p)^2+q \qquad (\ a,p,q \text{ は定数で } a\neq 0\ ) .$$

2 次式をこの形に変形することを**平方完成**という． 2 次関数を平方完成された 2 次式で表すことは重要である．

定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ とする．変数 x の 2 次式 ax^2+bx+c の平方完成は次のようになる：

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left\{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} . \end{aligned}$$

$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば，任意の実数 x について， $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ より $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ であり，かつ $-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ なので，

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \geq -\frac{b^2-4ac}{4a} > 0 .$$

$a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば，任意の実数 x について， $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ より $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0$ であり，かつ $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ なので，

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \leq -\frac{b^2-4ac}{4a} < 0 .$$

こうして次の定理が導かれる．

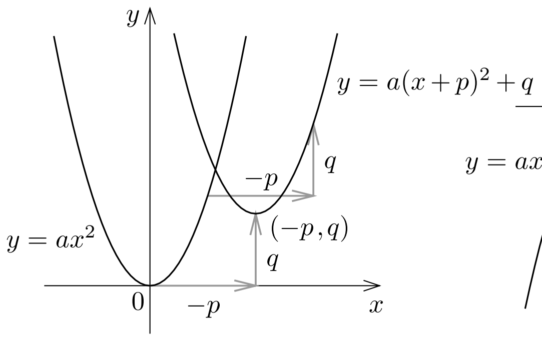
定理 0.4.1　2 次関数 ax^2+bx+c （定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ ）について次のことが成り立つ：

$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば， 任意の実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ；

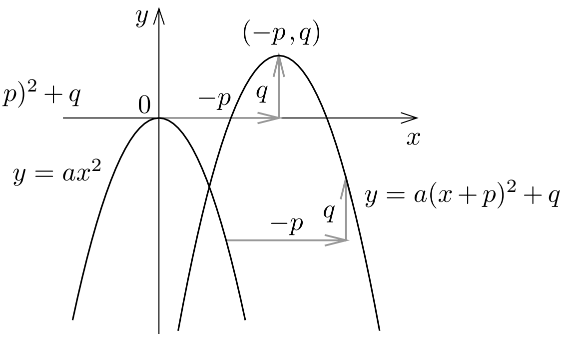
$a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ ならば， 任意の実数 x について $ax^2+bx+c<0$ ．

平方完成された 2 次式で表される 2 次関数のグラフについて次の定理が導かれる．

定理 0.4.2　xy 座標平面において，2 次関数 $y=a(x+p)^2+q$ （ a,p,q は定数で $a\neq 0$ ） のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ，y 軸の向きに q だけ平行移動させた図形である；従って，2 次関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフと合同で向きも同じ放物線であり，頂点は $(-p,q)$ である．

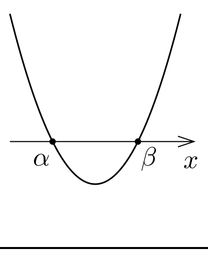
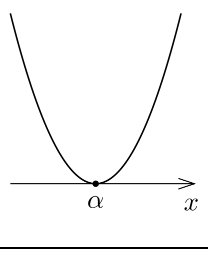
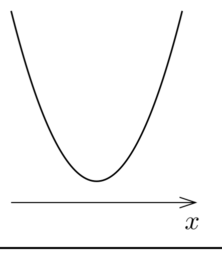
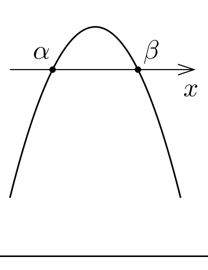
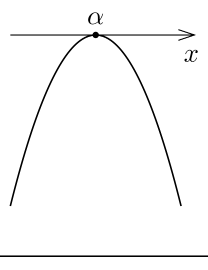
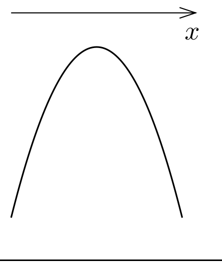


$a>0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ



$a<0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ

定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ とする．未知数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と，xy 座標平面における変数 x の 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の個数とは一致する．

	$b^2-4ac>0$ のとき	$b^2-4ac=0$ のとき	$b^2-4ac<0$ のとき
$ax^2+bx+c=0$ の解	異なる 2 つの実数解 α,β （ $\alpha<\beta$ ）	1 つの実数解（重解） α	異なる 2 つの虚数解
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸 （ $a>0$ のとき）			
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸 （ $a<0$ のとき）			
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点	2 個	1 個	無し