§0.7　対数関数

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は区間 $(0,\infty)$ である． $y>0$ である各実数 y に対して $y=a^x$ である実数が唯一つある．従って，定理0.3.3より，実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数がある．指数関数 a^x の逆関数の定義域は，指数関数 a^x の値域である区間 $(0,\infty)$ である． a を底とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする**対数関数** (logarismic function) といい，正の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す．

実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする． a を底とする対数関数の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます．また，対数を表す式 $\log_a X$ において，$\log_a$ の中身 X を**真数**という．対数関数はの定義域は区間 $(0,\infty)$ （の一部）なので，

対数の真数は正の数でなければならない

ことに注意すること．

定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とする． a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数を a^x の逆関数なので，定理0.3.1より次の定理が成り立つ．

定理0.7.1　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする．

任意の実数 p について　$\log_a(a^p)=p$,

$r>0$ である任意の実数 r について　$a^{\log_a r}=r$.

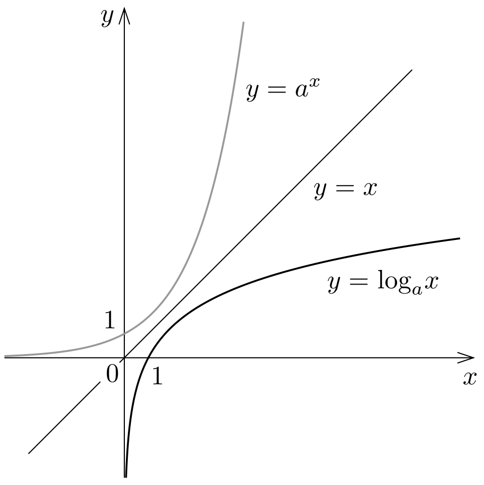
a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とする． $1=a^0$ なので，定理0.7.1より，

$$\log_a 1=\log_a(a^0)=0\ .$$

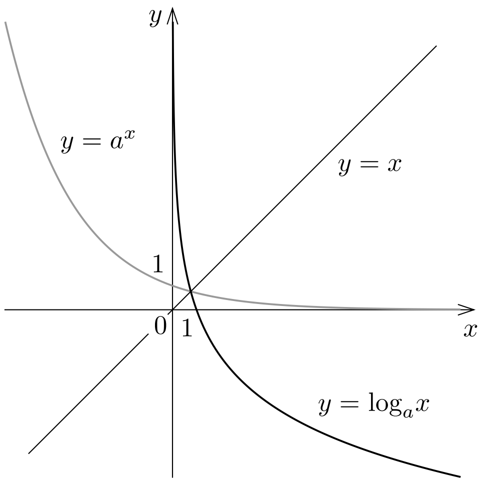
$a=a^1$ なので，

$$\log_a a=\log_a(a^1)=1\ .$$

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする． a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数なので，定理0.3.2より，xy 座標平面において，$y=\log_a x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは限りなく y 軸に近づいていくが，y 軸に接することはない．つまり，y 軸は $y=\log_a x$ のグラフの漸近線である．



$a>1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ



$0<a<1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ．

定理0.7.2　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．対数関数 $\log_a x$ は，$a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．

更に，対数関数について以下の定理が成り立つ．

定理0.7.3　a は正の実数で $a\neq 1$ とする． $r,s>0$ である任意の実数 r,s 及び任意の実数 p について，

$$\log_a rs=\log_a r+\log_a s\ ,\qquad \log_a\frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s\ ,\qquad \log_a r^p=p\log_a r\ .$$

定理0.7.4（対数の底の変換公式）　実数 a,b,c について，$a,b,c>0$, $a,c\neq 1$ のとき，

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\ .$$

定理0.7.5　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする． $r>0$, $s>0$ である任意の実数 r と s とについて，

$$r=s\iff\log_a r=\log_a s\ .$$

定理0.7.6　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする．

(1)　$a>1$ のとき，任意の実数 r と s とについて，

$$0<r<s\iff\log_a r<\log_a s\ ,$$
$$0<r\leq s\iff\log_a r\leq\log_a s\ ;$$

(2)　$0<a<1$ のとき，任意の実数 r と s とについて，

$$0<r<s\iff\log_a r>\log_a s\ ,$$
$$0<r\leq s\iff\log_a r\geq\log_a s\ .$$

底が 10 の対数を常用対数という．工学では，正の実数 r の常用対数 $\log_{10} r$ を $\log r$ と略記することが多い．