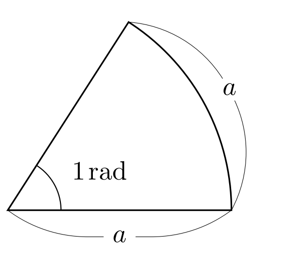
§0.8　三角関数

半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさを $1\,\mathrm{rad}$ と定義する．弧度法の単位“rad”と度数法の単位“°”との間には次の関係が成り立つ：

$$\pi\,\mathrm{rad} = 180^\circ \ .$$



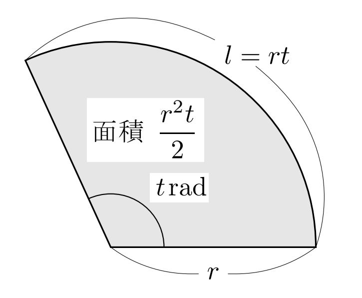
この等式より以下の等式が導かれる：任意の実数 t,u について，

$$t\,\mathrm{rad} = \frac{t}{\pi}\pi\,\mathrm{rad} = \frac{t}{\pi}180^\circ = \left(\frac{180t}{\pi}\right)^\circ \ ,$$

$$u^\circ = \left(\frac{u}{180}180\right)^\circ = \frac{u}{180}180^\circ = \frac{u}{180}\pi\,\mathrm{rad} = \frac{\pi u}{180}\mathrm{rad} \ .$$

次の定理が成り立つ．

定理 0.8.1　正の実数 l,r,t について，扇形の半径が r で中心角の弧度法による大きさが $t\,\mathrm{rad}$ で弧の長さが l であるとき $l = rt$ ．



定理 0.8.2　正の実数 r,t について，半径が r で中心角の弧度法による大きさが $t\,\mathrm{rad}$ である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}r^2t$ である．

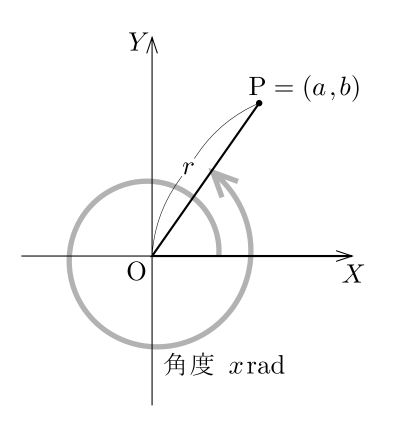
扇形の中心角の大きさを度数法で考えるより弧度法で考える方が公式が簡単になる．

正弦関数 $\sin x$，余弦関数 $\cos x$，正接関数 $\tan x$ を定義する．

定義　任意の実数 x に対して，正弦関数の値 $\sin x$，余弦関数の値 $\cos x$，正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する：XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する一般角 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P} = (a,b)$（但し $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ ）について $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくとき，

$$\sin x = \frac{b}{r} \ , \qquad \cos x = \frac{a}{r} \ ,$$

$$a \neq 0 \ のとき \quad \tan x = \frac{b}{a} \ .$$



これらの関数を三角関数 (trigonometric function) という．実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍であるとき正接関数 $\tan x$ の値はない．以後，正弦関数または余弦関数を扱うとき，特に断りがない限り，定義域は実数全体とする．また，正接関数を扱うとき，特に断りがない限り，定義域は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数の全体とする．

実数 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ の各々における正弦関数・余弦関数・正接関数の値は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&\sin 0 = 0 \ , && \cos 0 = 1 \ , && \tan 0 = 0 \ ; \\
&\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ , && \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , && \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ; \\
&\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , && \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , && \tan\frac{\pi}{4} = 1 \ ; \\
&\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , && \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ , && \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ . \\
&\sin\frac{\pi}{2} = 1 \ , && \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ , && \tan\frac{\pi}{2} \ : \ 値無し \ .
\end{aligned}$$

更に正割関数，余接関数，余割関数，の3個の三角関数を定義する．$\cos x \neq 0$ である実数 x に対して，正割関数の値 $\sec x$ を以下のように定義する：

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \ .$$

また，$\sin x \neq 0$ である実数 x に対して，余接関数の値 $\cot x$ 及び余割関数の値 $\mathrm{cosec}\, x$ を以下のように定義する：

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \ , \qquad \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} \ .$$

以下の定理が導かれる．

定理 0.8.3　任意の実数 x について，x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ .$$

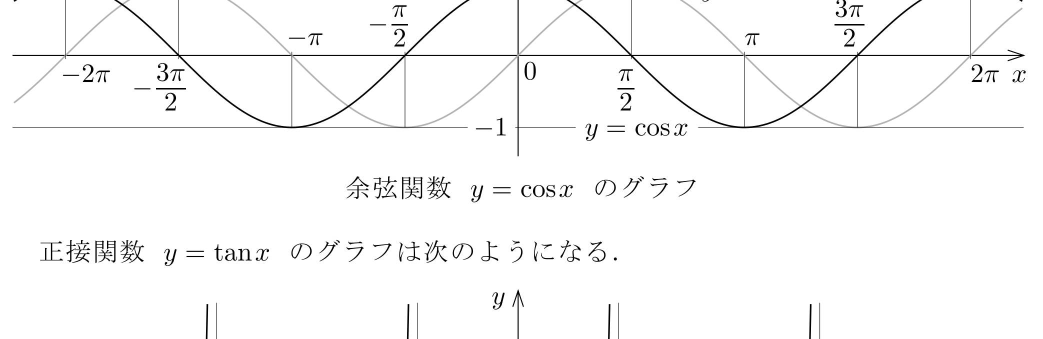
定理 0.8.4　任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ .$$

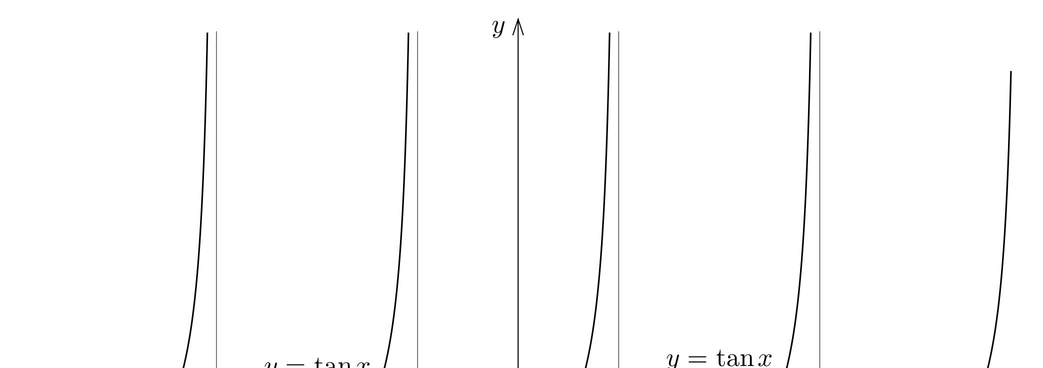
定理 0.8.5　任意の実数 x について，x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \ .$$

座標平面において，正弦関数 $\sin x$ のグラフと余弦関数 $\cos x$ のグラフとは同じ形である．この形の曲線を正弦曲線という．

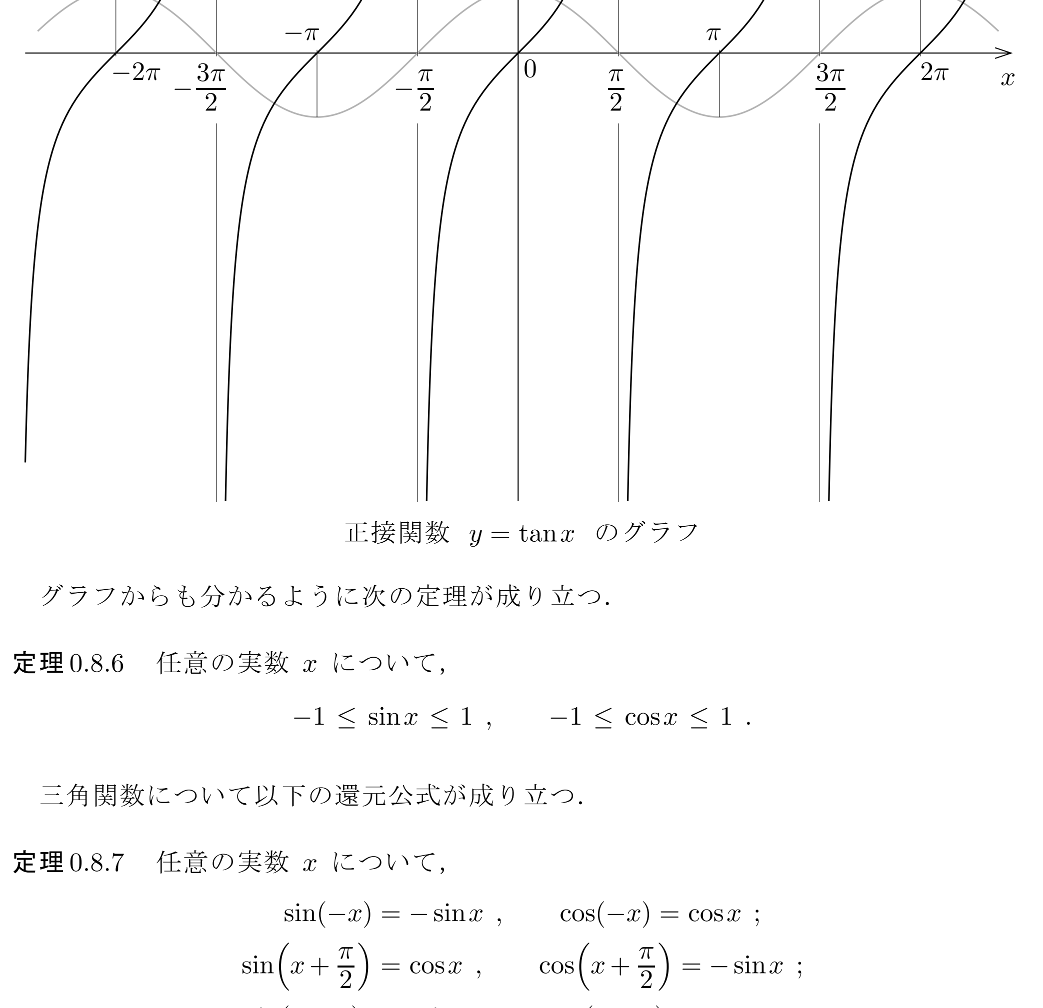


正弦関数 $y = \sin x$ のグラフ



余弦関数 $y = \cos x$ のグラフ

正接関数 $y = \tan x$ のグラフは次のようになる．



正接関数 $y = \tan x$ のグラフ

グラフからも分かるように次の定理が成り立つ．

定理 0.8.6　任意の実数 x について，

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \ , \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \ .$$

三角関数について以下の還元公式が成り立つ．

定理 0.8.7　任意の実数 x について，

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x \ , & \cos(-x) &= \cos x \ ; \\
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \ , & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \ ; \\
\sin(x + \pi) &= -\sin x \ , & \cos(x + \pi) &= -\cos x \ .
\end{aligned}$$

任意の実数 x 及び任意の整数 n について，

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x \ , \qquad \cos(x + 2n\pi) = \cos x \ .$$

定理 0.8.8　$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について，

$$\tan(-x) = -\tan x \ .$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x 及び任意の整数 n について，

$$\tan(x + n\pi) = \tan x \ .$$

関数 f 及び 0 でない定数 p について，

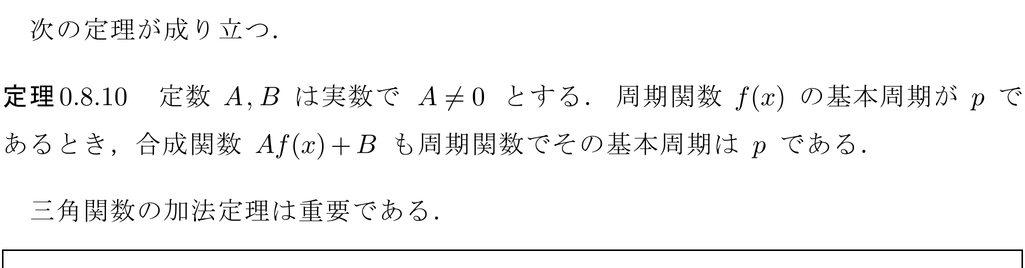
$$f \ の定義域の任意の点 \ x \ について \quad f(x+p) = f(x)$$

であるとき，定数 p を f の**周期** (period) という．関数 f の周期があるとき，f を**周期関数** (periodic function) という[2]．そして，周期関数 f の正の周期のなかで最小のものを f の基本周期 (fundamental period) という．多くの場合，単に周期というと基本周期のことを意味する．

正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ とは周期関数で，基本周期は 2π である．また，正接関数 $\tan x$ は周期関数で，基本周期は π である．更に次の定理が成り立つ．

定理 0.8.9　定数 a,b は実数で $a \neq 0$ とする．関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\frac{2\pi}{|a|}$ である．また，関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\frac{\pi}{|a|}$ である．

定数 a,b は実数で $a \neq 0$ とする．関数 $\sin(ax+b)$ 及び $\cos(ax+b)$ の基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ は，xy 座標平面における $y = \sin(ax+b)$ のグラフ及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおいて次のように現われる．



関数 $y = \sin(ax+b)$ 及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおける基本周期

次の定理が成り立つ．

定理 0.8.10　定数 A,B は実数で $A \neq 0$ とする．周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき，合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である．

三角関数の加法定理は重要である．

定理 0.8.11（三角関数の加法定理）　任意の実数 a,b について，

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad （複号同順）,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad （複号同順）,$$

$\tan a$ の値と $\tan b$ の値と $\tan(a+b)$ または $\tan(a-b)$ の値があるとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad （複号同順）.$$

加法定理より以下の公式が導かれる．

定理 0.8.13　任意の実数 a について，

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

$\tan a$ 及び $\tan 2a$ の値があるとき

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \ .$$

定理 0.8.14　任意の実数 a について，

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ , \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ ,$$

$\tan a$ の値があるとき

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \ .$$

定理 0.8.15　任意の実数 a,b について，

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

定理 0.8.16　任意の実数 a,b について，

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

---

[2] 但し，普通，定数関数は周期関数とは考えない．