

§0.9 逆三角関数

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の値域は区間 $[-1, 1]$ である。
 $-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して、 $y = \sin x$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 x が唯一つある。従って、定理0.3.3より、区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数がある。この正弦関数 $\sin x$ の逆関数の定義域は、元の正弦関数 $\sin x$ の値域である区間 $[-1, 1]$ である。この正弦関数の逆関数を**逆正弦関数**といい、区間 $[-1, 1]$ の実数 x における値を $\sin^{-1}x$ あるいは $\arcsin x$ と書き表す³⁾。

区間 $[0, \pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の値域は区間 $[-1, 1]$ である。 $-1 \leq y \leq 1$ である各実数 y に対して、 $y = \cos x$ かつ $0 \leq x \leq \pi$ である実数 x が唯一つある。従って、定理0.3.3より、区間 $[0, \pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数がある。この余弦関数 $\cos x$ の逆関数の定義域は、元の余弦関数 $\cos x$ の値域である区間 $[-1, 1]$ である。この余弦関数の逆関数を**逆余弦関数**といい、区間 $[-1, 1]$ の実数 x における値を $\cos^{-1}x$ あるいは $\arccos x$ と書き表す⁴⁾。

区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の値域は実数全体である。各実数 y に対して、 $y = \tan x$ かつ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ である実数 x が唯一つある。従って、定理0.3.3より、区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数がある。この正接関数 $\tan x$ の逆関数の定義域は、元の正接関数 $\tan x$ の値域である実数全体である。この正接関数の逆関数を**逆正接関数**といい、実数 x における値を $\tan^{-1}x$ あるいは $\arctan x$ と書き表す⁵⁾。

これらの三角関数の逆関数を逆三角関数 (trigonometric function) という。
 逆三角関数の値について定義より次のことが成り立つ。

実数 x について、

$$\begin{aligned} \sin^{-1}x \text{ の値がある条件は } & -1 \leq x \leq 1 \text{ でこのとき } -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2} ; \\ \cos^{-1}x \text{ の値がある条件は } & -1 \leq x \leq 1 \text{ でこのとき } 0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi ; \\ x \text{ が何であっても } & \tan^{-1}x \text{ の値があつて } -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

逆三角関数は三角関数の逆関数なので、定理0.3.1より次の定理が導かれる。

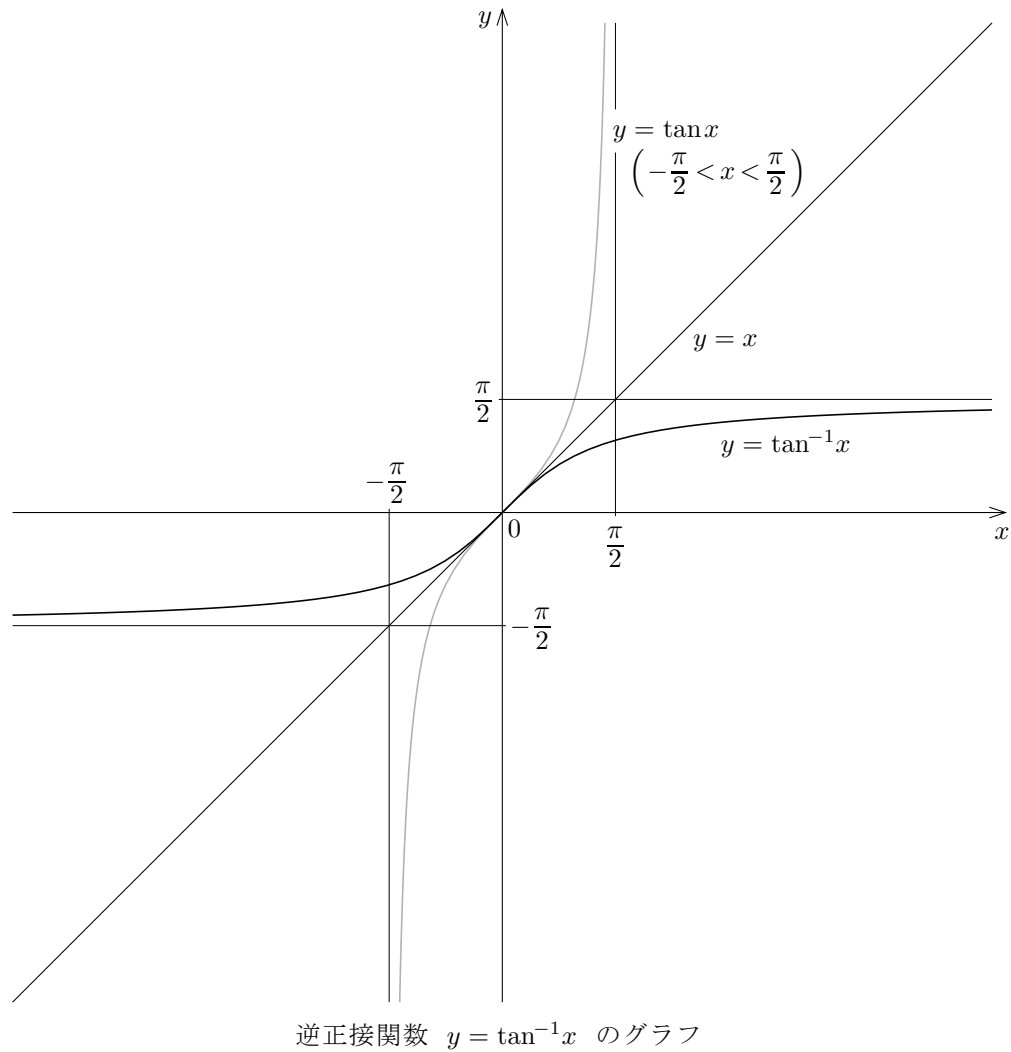
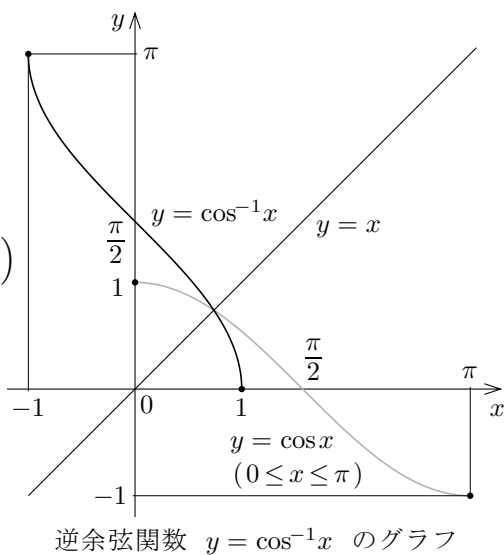
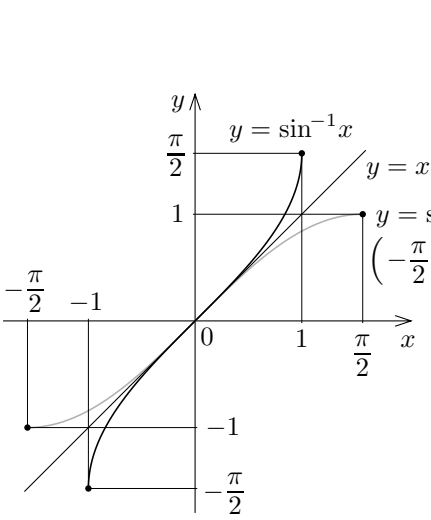
定理0.9.1

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ である各実数 } u \text{ について } & \sin^{-1}(\sin u) = u ; \\ 0 \leq u \leq \pi \text{ である各実数 } u \text{ について } & \cos^{-1}(\cos u) = u ; \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ である各実数 } u \text{ について } & \tan^{-1}(\tan u) = u . \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} -1 \leq v \leq 1 \text{ である各実数 } v \text{ について } & \sin(\sin^{-1}v) = v ; \\ -1 \leq v \leq 1 \text{ である各実数 } v \text{ について } & \cos(\cos^{-1}v) = v ; \\ \text{各実数 } v \text{ について } & \tan(\tan^{-1}v) = v . \end{aligned}$$

逆三角関数は三角関数の逆関数なので、定理0.3.6より、 xy 座標平面において逆三角関数のグラフは元の三角関数のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である。



グラフを見て分かるように、関数 $\sin^{-1}x$ と $\tan^{-1}x$ とは奇関数である。

定理0.9.2 $-1 \leq x \leq 1$ である各実数 x について $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$. 各実数 x について $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$.

3) \sin^{-1} も \arcsin も “アークサイン” という。

4) \cos^{-1} も \arccos も “アークコサイン” という。

5) \tan^{-1} も \arctan も “アークタンジェント” という。