§1.1　数列の定義

数列 (sequence) とは，定義域が自然数の集合である関数のことである；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない．例えば，集合 $\{1,2,3,5,6,7\}$ のように途中で抜けた自然数がある集合は数列の定義域にならない．

数列について，関数の値を特に**項**という．数列 f について，自然数 n おける f の値 $f(n)$ を第 n 項という．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項という．自然数を表す変数 n に対して第 n 項を一般項という．

数列 a について，自然数 n における値つまり第 n 項を $a(n)$ をしばしば a_n と書き表す；そして，数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表す．自然数を表す変数 n に対して数列 $\{a_n\}$ は n を独立変数とする関数であることを理解すること．

$\boxed{\text{例}}$　数列 $\{n^2\}$ は，自然数 n における値が $f(n)=n^2$ である関数 f であり，第 1 項は $f(1)=1^2=1$ ，第 5 項は $f(5)=5^2=25$ ，第 20 項は $f(20)=20^2=400$ ．

$\boxed{\text{終}}$

数列の定義域は，自然数全体 $\{0,1,2,3,4,\dots\}$ かあるいは正の自然数全体 $\{1,2,3,4,\dots\}$ かのどちらかである場合が多い．例えば数列 $\{a_n\}$ の定義域が自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ であることを明示するために $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と書き表す．また，例えば数列 $\{b_n\}$ の定義域が正の自然数全体 $\{1,2,3,4,\dots\}$ であることを明示するために $\{b_n\}_{n\geq 1}$ と書き表す.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n=3n^2-7n$ と定める．m は自然数とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(m+2)$ 項 a_{m+2} を求める．

$$a_4=3\cdot 4^2-7\cdot 4=4(12-7)=20\ ,$$
$$a_{m+2}=3(m+2)^2-7(m+2)=(m+2)\{3(m+2)-7\}=(m+2)(3m-1)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.1.1}}$　自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n=n^3-5n^2$ と定める．自然数 k について $k\geq 2$ とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(k-2)$ 項 a_{k-2} を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ について，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値や第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} の値などから第 n 項 a_n の値を定める等式を**漸化式**という.

$\boxed{\text{例}}$　自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，

$$1\text{以上の各自然数 } n \text{ に対して}\quad a_n=3a_{n-1}-5$$

とする；このときの等式 $a_n=3a_{n-1}-5$ が漸化式である．更に $a_0=4$ とする．このとき，

漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=1$ とすると $a_1=3a_0-5=3\cdot 4-5=7$,
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=2$ とすると $a_2=3a_1-5=3\cdot 7-5=16$,
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=3$ とすると $a_3=3a_2-5=3\cdot 16-5=43$,
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=4$ とすると $a_4=3a_3-5=3\cdot 43-5=124$,

$$\vdots$$

というように，次々に $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\dots$ の値を求めることができる．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，漸化式

$$a_n=\phi(a_{n-1})\qquad (\,n\geq 1\,)$$

が成り立つとき，

$$a_1=\phi(a_0)\ ,\qquad a_2=\phi(a_1)\ ,\qquad a_3=\phi(a_2)\ ,\qquad a_4=\phi(a_3)\ ,\qquad \cdots$$

のように，a_0 の値が分かれば，順次 $a_1,a_2,a_3,a_4,\dots$ の値を求めることができる．このように，漸化式によって数列を定めることを，数列の**帰納的定義**という.

$\boxed{\text{問題 1.1.2}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0=5$ ，1 以上の各自然数 n について $a_n=2a_{n-1}-3$ ．a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 の値を求めよ．

例えば数列 $\{a_n\}_{2\leq n\leq 9}$ の定義域は 2 以上 9 以下の自然数の全体である．この数列のように，定義域が有限集合である数列を有限数列という．また例えば数列 $\{a_n\}_{n\geq 2}$ の定義域は 2 以上の自然数の全体である．この数列のように，定義域が無限集合である数列を無限数列という.