§1.2　数列の項の総和

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について　$m \leq n$　とする．　f について，m に対する項 $f(m)$ から n に対する項 $f(n)$ までの総和

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

を $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ と書き表す：

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n) .$$

例を挙げる．

$$\sum_{k=3}^{9} \frac{k}{2} = \frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}+\frac{7}{2}+\frac{8}{2}+\frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21 .$$

$$\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 4+9+16+25+36 = 90 .$$

式　$\sum_{k=m}^{n} f(k)$　に現われる文字 k を他の文字に置き換えても値は同じである．例えば，

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{6}{i} = \sum_{j=2}^{5} \frac{6}{j} = \sum_{k=2}^{5} \frac{6}{k} = \frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5} = 3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5} = \frac{77}{10} .$$

問題 1.2.1　総和　$\sum_{i=0}^{4} \frac{i^3}{10}$　を計算せよ．

問題 1.2.2　総和　$\sum_{j=2}^{5} \frac{12}{j+1}$　を計算せよ．

総和記号 Σ の性質を幾つか導く．

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとき，定数 c に対して，総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7} \{cf(k)\} = cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7) = c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\} ;$$

Σ の定義より　$\sum_{k=4}^{7} f(k) = f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$　なので，

$$\sum_{k=4}^{7} \{cf(k)\} = c\sum_{k=4}^{7} f(k) .$$

一般的に次の定理が成り立つ．

定理 1.2.1　$m \leq n$　である自然数 m, n が数列 f の定義域に属すとき，定数 c に対して，

$$\sum_{k=m}^{n} \{cf(k)\} = c\sum_{k=m}^{n} f(k) .$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとき，総和記号 Σ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{7} \{f(k)+g(k)\} &= f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)\\ &= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7) .\end{aligned}$$

Σ の定義より　$\sum_{k=5}^{7} f(k) = f(5)+f(6)+f(7)$，$\sum_{k=5}^{7} g(k) = g(5)+g(6)+g(7)$　なので，

$$\sum_{k=5}^{7} \{f(k)+g(k)\} = \sum_{k=5}^{7} f(k) + \sum_{k=5}^{7} g(k) .$$

一般的に次の定理が成り立つ．

定理 1.2.2　$m \leq n$　である自然数 m, n が数列 f と g との定義域に属すとき，

$$\sum_{k=m}^{n} \{f(k) \pm g(k)\} = \sum_{k=m}^{n} f(k) \pm \sum_{k=m}^{n} g(k) \quad \text{（複号同順）} .$$

総和記号 Σ に関する重要な計算技法を述べる．

例解　4 と 7 とが定義域に属す数列 f に対して　$\sum_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\} = f(4)-f(5)\ +f(5)-f(6)\ +f(6)-f(7)\ +f(7)-f(8) .$$

この式では，$-f(5)$ と $+f(5)$ とが，$-f(6)$ と $+f(6)$ とが，$-f(7)$ と $+f(7)$ とが，相殺されて消える：

$$f(4)-f(5)\ +f(5)-f(6)\ +f(6)-f(7)\ +f(7)-f(8) = f(4)-f(8) .$$

従って　$\sum_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\} = f(4)-f(8)$ ．　**終**

例題　総和　$\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1}\right)$　を計算する．

〔解説〕

$$\begin{aligned}&\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1}\right)\\ &= \frac{7}{3}-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}-\frac{7}{6}+\frac{7}{6}-\frac{7}{7}+\cdots+\frac{7}{28}-\frac{7}{29}+\frac{7}{29}-\frac{7}{30}+\frac{7}{30}-\frac{7}{31} .\end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える．

$$\begin{array}{l}\frac{7}{3}-\frac{7}{4}\\ \quad +\frac{7}{4}-\frac{7}{5}\\ \qquad +\frac{7}{5}-\frac{7}{6}\\ \qquad\quad +\frac{7}{6}-\frac{7}{7}\\ \qquad\qquad \vdots\\ \qquad\qquad\quad +\frac{7}{28}-\frac{7}{29}\\ \qquad\qquad\qquad +\frac{7}{29}-\frac{7}{30}\\ \qquad\qquad\qquad\quad +\frac{7}{30}-\frac{7}{31}\\ \hline \frac{7}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{7}{31}\end{array}$$

故に　$\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1}\right) = \frac{7}{3} - \frac{7}{31} = \frac{217-21}{93} = \frac{196}{93}$ ．　**終**

問題 1.2.3　総和　$\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i}\right)$　を計算せよ．

例題　総和　$\sum_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right)$　を計算する．

〔解説〕

$$\begin{aligned}&\sum_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right)\\ &= \sqrt{13}-\sqrt{10}\ +\sqrt{16}-\sqrt{13}\ +\sqrt{19}-\sqrt{16}\ +\cdots+\sqrt{88}-\sqrt{85}\ +\sqrt{91}-\sqrt{88} .\end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える．

$$\begin{array}{r}\sqrt{13}-\sqrt{10}\\ +\sqrt{16}-\sqrt{13}\qquad\\ +\sqrt{19}-\sqrt{16}\qquad\qquad\\ +\sqrt{21}-\sqrt{19}\qquad\qquad\qquad\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\\ +\sqrt{88}-\sqrt{85}\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\\ +\sqrt{91}-\sqrt{88}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\\ \hline \sqrt{91}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\sqrt{10}\end{array}$$

従って　$\sum_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right) = \sqrt{91} - \sqrt{10}$ ．　**終**

問題 1.2.4　総和　$\sum_{j=2}^{28} \left(\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1}\right)$　を計算せよ．