第１章の補遺　階差数列

数列 $\{a_n\}$ の階差数列とは，$b_n = a_{n+1} - a_n$ となる数列 $\{b_n\}$ のことである．

定理　数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ が数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の階差数列であるとき，正の自然数 n について

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \ .$$

証明　数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ は数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の階差数列であるとする．自然数 k に対して $b_k = a_{k+1} - a_k$ なので，正の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} b_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\ &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1}\\ &= a_n - a_0 \ .\end{aligned}$$

従って　$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ ．　（証明終り）

数列の最初の幾つかの項の値が分かっているときその数列を表す式を求めることを考える．

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のようになるする：

$$a_0 = 3\ ,\quad a_1 = 2\ ,\quad a_2 = 3\ ,\quad a_3 = 6\ ,\quad a_4 = 11\ .$$

この条件を満たす数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を一つ求めよ（数列の第 n 項 a_n をできるだけ簡単な式で表せ）．

〔解答〕 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の階差数列を $\{b_n\}_{n\geq 0}$ とおく．

$$b_0 = a_1 - a_0 = -1\ ,\quad b_1 = a_2 - a_1 = 1\ ,\quad b_2 = a_3 - a_2 = 3\ ,\quad b_3 = a_4 - a_3 = 5\ .$$

従って，数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ は公差 2 の等差数列であるとしてよい．このとき，各自然数 k に対して

$$b_k = b_0 + 2k = 2k - 1\ .$$

従って，各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k-1) = 3 + 2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 3 + 2\frac{(n-1)n}{2} - n\\ &= n^2 - 2n + 3\ .\end{aligned}$$

数列 $\{n^2 - 2n + 3\}_{n\geq 0}$ は与えられた条件を満たす．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.補遺.1}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のようになるする：

$$a_0 = 3\ ,\quad a_1 = 0\ ,\quad a_2 = 1\ ,\quad a_3 = 6\ ,\quad a_4 = 15\ .$$

この条件を満たす数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を一つ求めよ（数列の第 n 項 a_n をできるだけ簡単な式で表せ）．

$\boxed{\text{問題 1.補遺.2}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のようになるする：

$$a_0 = 1\ ,\quad a_1 = 4\ ,\quad a_2 = 10\ ,\quad a_3 = 22\ ,\quad a_4 = 46\ .$$

この条件を満たす数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を一つ求めなさい（数列の第 n 項 a_n をできるだけ簡単な式で表せ）．

階差数列を用いると，漸化式によって定められる数列の項を独立変数だけの式で表せることがある．

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定める： $a_0 = 1$ で，正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} + 3$ ．この数列の第 n 項 a_n を独立変数 n （と定数と）だけを含む式で表す．

〔解答〕 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の階差数列を $\{b_n\}_{n\geq 0}$ とおく．正の各自然数 n について，$a_n = 2a_{n-1} + 3$ より

$$\begin{aligned}b_n &= a_{n+1} - a_n = 2a_n + 3 - (2a_{n-1} + 3) = 2(a_n - a_{n-1})\\ &= 2b_{n-1}\ .\end{aligned}$$

従って数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ は公比 2 の等比数列なので，自然数 n に対して

$$b_n = b_0 2^n\ .$$

$a_1 = 2a_0 + 3 = 5$ より $b_0 = a_1 - a_0 = 5 - 1 = 4$ なので，自然数 n に対して

$$b_n = 4\cdot 2^n\ .$$

従って，自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(4\cdot 2^k) = 1 + 4\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + 4\frac{2^{n-1+1} - 1}{2 - 1} = 1 + 4(2^n - 1)\\ &= 2^{n+2} - 3\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.補遺.3}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定める： $a_0 = 2$ で，正の各自然数 n について $a_n = 3a_{n-1} - 2$ ．この数列の第 n 項 a_n を独立変数 n （と定数と）だけを含む式で表せ．