

§ 2.0 速度

物体が移動する速度について考える。

例解 物理実験によって次のことが知られている：物体が自由落下するとき、0 以上の実数 t に対して、落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2$ m である¹⁾。つまり、 t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおくと $\varphi(t) = 4.9t^2$ 。

物体が落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s）を考える。ある時刻からある時刻までの時間における落下距離に対して落下の平均速度は次のようになる：

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} .$$

例えば、落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に、落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2 = 122.5$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(5) - \varphi(3)$ なので、この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5) - \varphi(3)}{5 - 3} = \frac{122.5 - 44.1}{2} = 39.2 .$$

落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\frac{\varphi(t) - \varphi(3)}{t - 3}$ である。幾つかの t の値に対してをこの平均速度を計算する：

$$\text{落下開始 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1) - \varphi(3)}{3.1 - 3} = 29.89 \quad ;$$

$$\text{落下開始 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01) - \varphi(3)}{3.01 - 3} = 29.449 \quad ;$$

$$\text{落下開始 3 秒後から 3.001 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001) - \varphi(3)}{3.001 - 3} = 29.4049 \quad ;$$

$$\text{落下開始 3 秒後から 3.0001 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.0001) - \varphi(3)}{3.0001 - 3} = 29.40049 \quad ;$$

$$\text{落下開始 3 秒後から 3.00001 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.00001) - \varphi(3)}{3.00001 - 3} = 29.400049 \quad ;$$

⋮

このように、変数 t の値を 3 に近づけていくと、落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\frac{\varphi(t) - \varphi(3)}{t - 3}$ は 29.4 に近づいていく。 t の値を 3 に近づけていくことは、3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける、つまり瞬間に近づけることである。そこで、落下開始 3 秒後の瞬間の速度は 29.4 m/s であると考え。つまり、落下開始 3 秒後の瞬間速度は、

$$\text{変数 } t \text{ の値を 3 に近づけるときの落下の平均速度 } \frac{\varphi(t) - \varphi(3)}{t - 3} \text{ が近づく値}$$

である。この瞬間速度を単に速度という。

終

このように、“瞬間速度”の概念を数学的に定義するためには、“変数 t の値を定数 a に近づけるときの t の関数の値が近づく値”という概念が必要になる。このような概念を極限 (limit) という。極限の概念はこれから微分積分を学ぶ上で重要である。

¹⁾ 物体に働く力が地球の重力だけであると考え。