

§ 2.1 関数の極限

例解 2 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad (x \neq 2) .$$

2 以外の任意の実数 x に対して $\psi(x)$ の値があるので、 $x \neq 2$ として x の値を 2 に近づけていくときの $\psi(x)$ の値を考えることができる。 x の値を 2 より大きい方から 2 に近づけていく：

$$x = 2.1 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.1^2 + 2.1 - 6}{2.1 - 2} = 5.1 ,$$

$$x = 2.001 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.001^2 + 2.001 - 6}{2.001 - 2} = 5.001 ,$$

$$x = 2.00001 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.00001^2 + 2.00001 - 6}{2.00001 - 2} = 5.00001 ,$$

⋮ .

x の値を 2 より小さい方から 2 に近づけていく：

$$x = 1.9 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.9^2 + 1.9 - 6}{1.9 - 2} = 4.9 ,$$

$$x = 1.999 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.999^2 + 1.999 - 6}{1.999 - 2} = 4.999 ,$$

$$x = 1.99999 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.99999^2 + 1.99999 - 6}{1.99999 - 2} = 4.99999 ,$$

⋮ .

つまり、変数 x の値を 2 に近づけていくと、 $\psi(x)$ の値は 5 に近づいていく。このようにとき、 x の値を 2 に限りなく近づけると $\psi(x)$ は 5 に収束する、または、 $x \rightarrow 2$ のとき $\psi(x)$ は 5 に収束するといひ、5 を $\psi(x)$ の極限 (値) という；この極限 (値) を $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x) = 5 .$$

終

一般的に述べる。関数 f 及び定数 a について、 a を除く f の定義域の中で a に限りなく近づけることができ、

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの値 c に限りなく近づくと

とき、 x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する (converge)、または、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき、 c を $f(x)$ の極限 (値) (limit value) といひ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

関数 f の独立変数 x 及び定数 a について、 $x \rightarrow a$ のとき、変数 x の値は f の定義域に属す a 以外の実数なので、 $x \neq a$.

関数の独立変数 x 及び定数 a について、 $x \rightarrow a$ のとき $x \neq a$.

従って、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は $f(a)$ と必ずしも関係ない。

関数 f 及び定数 a について、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ がどんな定数にも収束しないとき、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は発散するといひ。つまり次のようになる：

収束する = 唯一つの実数に限りなく近づくと = 極限值がある ；

発散する = 収束しない = 極限值がない .

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が発散するとき、極限を表す式 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の値はない。

例 0 以外の実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = x \sin \frac{3}{x} \quad (x \neq 0) , \quad g(x) = \sin \frac{3}{x} \quad (x \neq 0) .$$

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $f(x), g(x)$ の極限を調べる。試しに 0 に近い実数 x の値を幾つかに対して $f(x), g(x)$ の値を計算すると次の表のようになる。

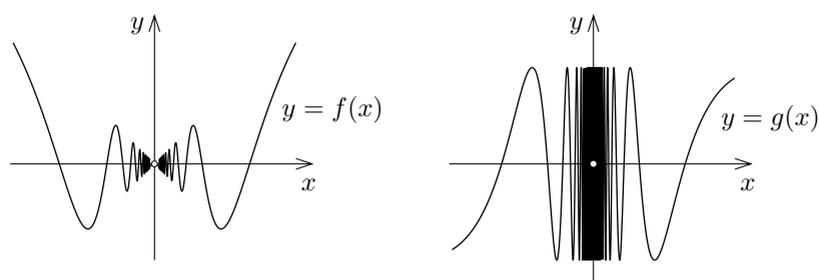
x の値	$f(x)$ の値	$g(x)$ の値	x の値	$f(x)$ の値	$g(x)$ の値
0.89201	-0.196054...	-0.219789...	-0.76031	-0.547615...	0.720252...
0.06059	-0.041405...	-0.683364...	-0.05289	0.009095...	-0.171970...
0.00374	-0.003211...	-0.858793...	-0.00214	0.001409...	-0.658508...
0.00027	0.000174...	0.645825...	-0.00063	-0.000429...	0.681419...
0.00006	-0.000059...	-0.999840...	-0.00008	0.000074...	-0.928927...

これらの表から見当が付くように次のようになる：

$x \rightarrow 0$ のとき $f(x)$ は 0 に収束する、つまり $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ；

$x \rightarrow 0$ のとき $g(x)$ は収束しない (発散する) .

関数 f のグラフ及び g のグラフは次のようになる。



終