§2.2　関数の連続性

$\boxed{\text{例解}}$　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^2$ と定める．この関数 $\varphi(x)$ について，$x \to 3$ のときの極限がどうなるか考える．x の値を 3 より大きい方から 3 に近づけていく：

$$\begin{aligned} x=3.1 &\text{ のとき } \varphi(x)=3.1^2=9.61\ , \\ x=3.001 &\text{ のとき } \varphi(x)=3.001^2=9.006001\ , \\ x=3.00001 &\text{ のとき } \varphi(x)=3.00001^2=9.0000600001\ , \\ &\vdots\ . \end{aligned}$$

x の値を 3 より小さい方から 3 に近づけていく：

$$\begin{aligned} x=2.9 &\text{ のとき } \varphi(x)=2.9^2=8.41\ , \\ x=2.999 &\text{ のとき } \varphi(x)=2.999^2=8.994001\ , \\ x=2.99999 &\text{ のとき } \varphi(x)=2.99999^2=8.9999400001\ , \\ &\vdots\ . \end{aligned}$$

このように，$x \to 3$ のとき $\varphi(x)$ は 9 に収束する：$\lim_{x\to 3}\varphi(x)=9$ ．この極限値 9 は $\varphi(3)$ の値である：$\varphi(3)=3^2=9$ ．従って $\lim_{x\to 3}\varphi(x)=\varphi(3)$ ．　$\boxed{\text{終}}$

関数 f と実数 a とについて，$f(a)$ の値があるとき，つまり a が関数 f の定義域に属すとき，$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となるのが普通である．このようなとき，a において f は**連続** (continuous) であるという．

定義　関数 f の定義域の実数 a において f が連続であるとは，$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束して $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となることである．

区間 I において関数 f が連続であるとは，I の各実数において f が連続であることである．

関数 f が連続であるとは，f が定義域の各実数において連続であることである．

証明は省くが，これまで私達が扱ってきた関数のほとんどは連続である [2)]．

定理 2.2.1　定数関数 [3)] は連続である．

$\boxed{\text{例}}$　定数関は連続なので，

$$\lim_{x\to 3}7=7\ ,\qquad \lim_{x\to -5}\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{9}{4}\ ,\qquad \lim_{x\to \frac{5}{3}}\sin 2=\sin 2\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理 2.2.2　冪関数は連続である．

$\boxed{\text{例}}$　冪関数 x^3 及び $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ は連続なので，

$$\lim_{x\to -2}x^3=(-2)^3=-8\ ,\qquad \lim_{x\to 7}\sqrt{x}=\sqrt{7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理 2.2.3　指数関数及び対数関数は連続である．

$\boxed{\text{例}}$　指数関数 2^x 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to 5}2^x=2^5=32\ ,\qquad \lim_{x\to 8}\log_3 x=\log_3 8\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理 2.2.4　三角関数及び逆三角関数は連続である．

$\boxed{\text{例}}$　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to 2}\sin x=\sin 2\ ,\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\cos x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\sin^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\ ,\qquad \lim_{x\to 6}\tan^{-1}x=\tan^{-1}6\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

このように，これまで扱ってきた多くの関数 f は定義域に属す実数 a において連続なので，$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ；このとき，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ なので，わざわざ極限値を考える意味がない．しかし，前節で述べた関数 $\psi(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ （ $x\neq 2$ ）のように，$\psi(2)$ の値が無いときにしばしば極限値 $\lim_{x\to 2}\psi(x)$ を考えることが有用になる．

[2)] 例えば 0 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\dfrac{1}{x}$ は，0 において連続ではないが，0 は定義域に属さない；0 以外の各実数において，つまり定義域の各実数において連続である；よってこの関数 $\dfrac{1}{x}$ は連続である．

[3)] 定義域の任意の x に対して $f(x)=k$ （ k は x と無関係な定数）となる関数を定数関数という．