§2.4　関数の極限の計算

前節で扱った極限値は，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ を用いて計算した．しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある．

$\boxed{\text{例解}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考える． $\lim_{x\to 3}(x-3)=3-3=0$ なので， $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ を $\dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim_{x\to 3}(x-3)}$ に変形できない．そこで以下のように計算する．

x^2-9 を因数分解すると $x^2-9=(x+3)(x-3)$ ． $x\to 3$ のとき， $x\neq 3$ つまり $x-3\neq 0$ なので [4]，

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

このように，変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を求めるために，分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を $x-a$ で約分する [5]．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限を調べる．

$x\to 1$ のとき， $x\neq 1$ より $x-1\neq 0$ なので，

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x+4}{x-3}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+4)}{\lim_{x\to 1}(x-3)}=\frac{1+4}{1-3}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.4.1}}$　変数 u について $u\to -2$ のときの $\dfrac{u^2-u-6}{u+2}$ の極限を調べよ．

$\boxed{\text{問題 2.4.2}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ の極限を調べよ．

$\boxed{\text{問題 2.4.3}}$　変数 t について $t\to 1$ のときの $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$ の極限を調べよ．

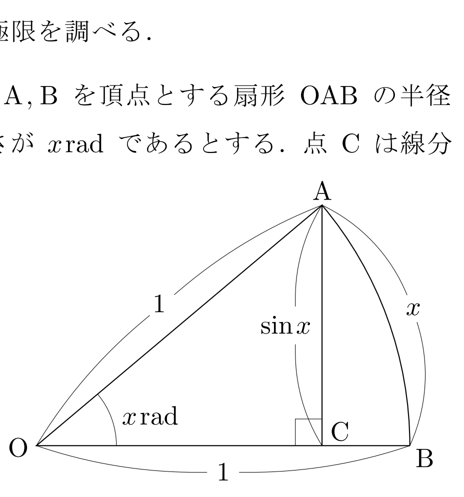
変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる．

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．右下図のように，点 O, A, B を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする．点 C は線分 OB に属し，直線 OB と直線 AC とは垂直であるとする．弧 AB の長さ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 及び線分 AC の長さ $\overline{\mathrm{AC}}$ は次のようになる：

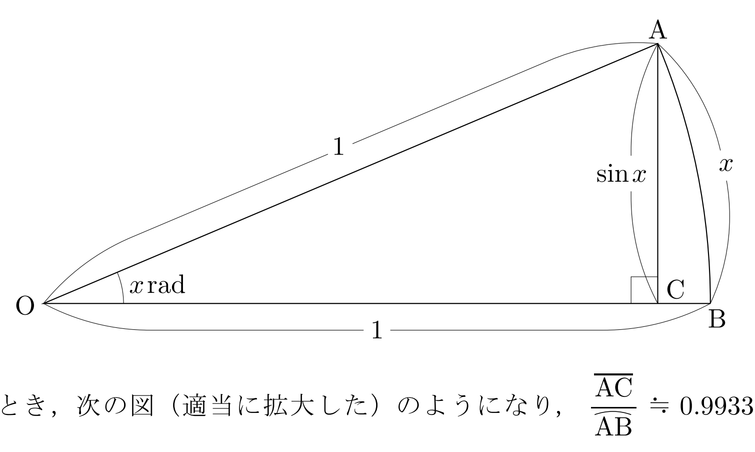
$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=x\ ,\qquad \overline{\mathrm{AC}}=\sin x\ .$$

よって

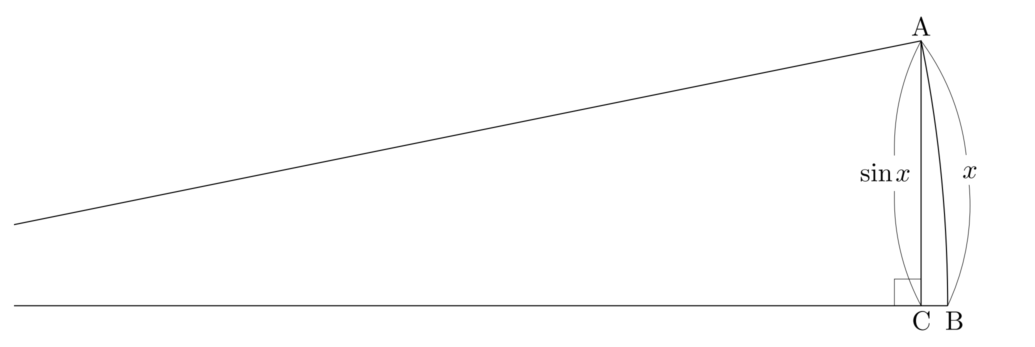
$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\frac{\sin x}{x}\ .$$



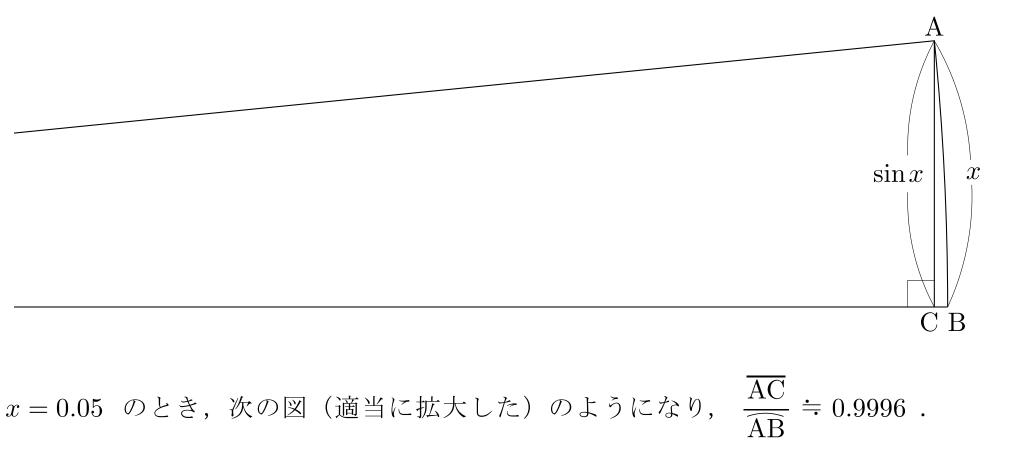
$x=0.4$ のとき，次の図（適当に拡大した）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9735$ ．



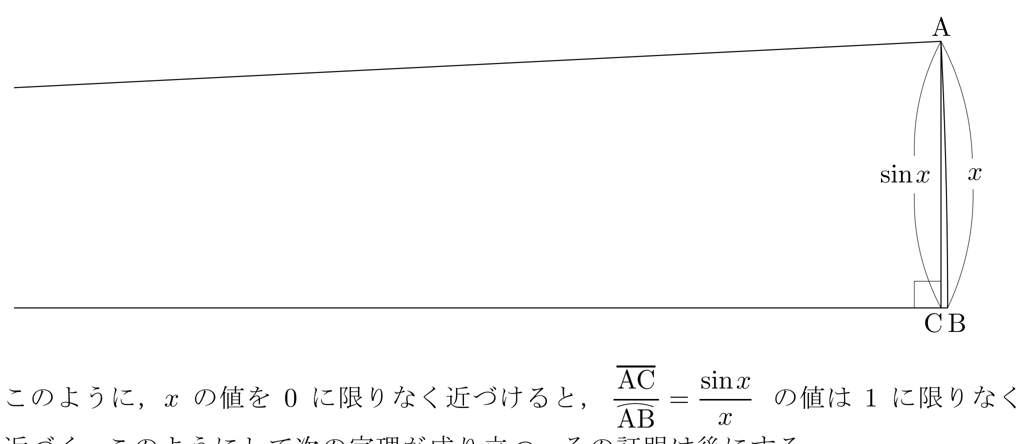
$x=0.2$ のとき，次の図（適当に拡大した）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9933$ ．



$x=0.1$ のとき，次の図（適当に拡大した）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9983$ ．



$x=0.05$ のとき，次の図（適当に拡大した）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9996$ ．



このように， x の値を 0 に限りなく近づけると， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\sin x}{x}$ の値は 1 に限りなく近づく．このようにして次の定理が成り立つ．その証明は後にする．

> **定理 2.4**　変数 x について $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は 1 に収束する：
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる．

〔解説〕 $y=3x$ とおく． $x=\dfrac{y}{3}$ なので，

$$\frac{\sin 3x}{x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=3\cdot\frac{\sin y}{y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=3x\to 0$ なので，定理 2.3.3 より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin y}{y}\right)\ .$$

定理 2.4 より $\lim_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.4.4}}$　変数 t について $t\to 0$ のときの $\dfrac{\sin\frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる．

〔解説〕 $y=5x$ とおく． $x=\dfrac{y}{5}$ ．

$$\frac{\tan 5x}{x}=\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x}=\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{5}}\cdot\frac{1}{\cos y}=\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{5}{\cos y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=5x\to 0$ ．定理 2.4 より

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\ .$$

関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{y\to 0}\cos y=1$ ，よって

$$\lim_{y\to 0}\frac{5}{\cos y}=\frac{5}{\lim_{y\to 0}\cos y}=\frac{5}{1}=5\ .$$

故に

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{5}{\cos y}\right)=1\cdot 5=5\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.4.5}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan\frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ．

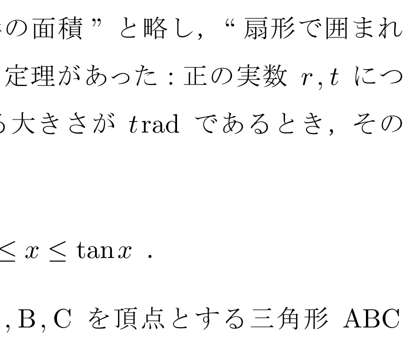
――――― 定理 2.4 の証明

“三角形で囲まれる領域の面積”を単に“三角形の面積”と略し，“扇形で囲まれる領域の面積”を単に”扇形の面積”と略す．次の定理があった：正の実数 r,t について，扇形の半径が r であり中心角の弧度法による大きさが $t\,\mathrm{rad}$ であるとき，その扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2t$ である．

定理　$0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$ である各実数 x について $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．

証明　実数 x について $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，角 BAC の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であり，角 ABC が直角であり，辺 AB の長さが 1 であるとする．辺 AC 上に $\overline{\mathrm{AD}}=1$ となる点 D をとり，点 D から直線 AB に下ろした垂線の足を H とおく．このとき，

$$\overline{\mathrm{DH}}=\sin x\ ,\qquad \overline{\mathrm{CB}}=\tan x\ .$$



三角形 ABC と三角形 ABD と扇形 ABD とについて，面積を比べると，

〔三角形 ABD の面積〕≤〔扇形 ABD の面積〕≤〔三角形 ABC の面積〕．

辺 AB を底辺とするとき三角形 ABD の高さは $\overline{\mathrm{DH}}=\sin x$ なので，三角形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}\sin x$ である．半径が 1 で中心角の大きさが $x\,\mathrm{rad}$ の扇形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}x$ である．辺 AB を底辺とするとき三角形 ABC の高さは $\overline{\mathrm{CB}}=\tan x$ なので，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\tan x$ である．従って

$$\frac{1}{2}\sin x\leq\frac{1}{2}x\leq\frac{1}{2}\tan x\ ,$$

よって $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．　　　　（証明終り）

証明は省くが次の定理が成り立つ．

定理（挟みうちの定理）　関数 f,g,h 及び実数 a,b,c について， $a<b<c$ で， $a<x<c$ かつ $x\neq b$ である各実数 x について $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ とする． $x\to b$ のとき $f(x)$ と $h(x)$ とが収束して $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}h(x)=k$ ならば， $x\to b$ のとき $g(x)$ も収束して $\lim_{x\to b}g(x)=k$ ．

これらの 2 つの定理を用いて定理 2.4 を証明する．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ ， $x\neq 0$ とする． $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ ．

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときを考える． $\sin x\leq x\leq\tan x$ なので，

$$\sin x\leq x\ \text{かつ}\ x\leq\frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

$x>0$ ， $\cos x>0$ なので， $x\leq\dfrac{\sin x}{\cos x}$ より $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}$ ， $\sin x\leq x$ より $\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．よって $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときは， $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\cos(-x)\leq\frac{\sin(-x)}{-x}\leq 1\ ,$$

$\cos(-x)=\cos x$ ， $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$ なので $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

このように， $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときも $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときも

$$\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1\ .$$

ここで $x\to 0$ とする． $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ ， $\lim_{x\to 0}1=1$ なので，挟みうちの定理より， $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は収束して $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ．

---

[4] $x-3=0$ のとき，等式 $\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$ は左辺の値がないので成り立たない．

[5] 変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，因数定理より， $x-a$ は $A(x)$ と $B(x)$ との両方の因数である；従って分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ は $x-a$ で約分できる．