§2.5　微分係数

変化する“速さ”について考える．

例　ある列車が駅を発車して走行しているとする． この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく． 時刻が a から t に変わる間に，走行距離は $\varphi(a)$ から $\varphi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ であり，この間の走行距離は $\varphi(t)-\varphi(a)$ であるので，この間の平均速度は

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行距離}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行時間}} = \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} \ .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の平均の速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における（瞬間）速度と考える． つまり次のようになる：

時刻 a における（瞬間）速度は平均速度の極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ ． 終

例　時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする． この水槽中の水量が増加する速さを考える． 時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく． 時刻が a から t に変わる間に，水槽中の水量は $\psi(a)$ から $\psi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ であり，この間の水量の増加は $\psi(t)-\psi(a)$ であるので，この間の水量の増加の平均の速さは

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の増加量}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の時間}} = \frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} \ .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の水量の増加の平均の速さ $\dfrac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における水量の増加の速さと考える：

時刻 a における水量の増加の速さは平均の速さの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ ． 終

時刻以外の量の変化に対する“速さ”もある．

例　燃料自動車は走行するとき燃料（ガソリンや軽油）を消費する，燃料を消費する“速さ”は，しばしば走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である；例えば，走行時間 1 時間当たりの燃料消費量よりも走行距離 1km 当たりの燃料消費量の方が重要である． ある燃料自動車が一直線に走るとして，出発点からの走行距離を変位とし，変位 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく． 変位が a から s に変わる間に，燃料消費量は $\rho(a)$ から $\rho(s)$ に変わる；この間の走行距離は $s-a$ であり，この間の燃料消費量は $\rho(s)-\rho(a)$ であるので，この間の燃料消費の平均の速さは

$$\frac{\text{変位 } a \text{ から } s \text{ までの間の燃料消費量}}{\text{変位 } a \text{ から } s \text{ までの間の走行距離}} = \frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a} \ .$$

変数 s の値を定数 a に限りなく近づけるとき，変位 a から s までの間の燃料消費の平均の速さ $\dfrac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a}$ が s と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を出発点からの距離 a における燃料消費の速さと考える：

変位 a における燃料消費の速さは平均の速さの極限値 $\displaystyle\lim_{s\to a}\frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a}$ ． 終

このような考え方を抽象化する． 関数 f の定義域に属す実数 a,b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する． このとき，x の値が a から b へ変化するときに $f(x)$ の値が変化する“平均の速さ”は次の式で表される：

$$\frac{f(x) \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ .$$

この式の値を a から b までの $f(x)$ の平均変化率という． 更に，定数 a 及び変数 t に対して，a において $f(x)$ が変化する“瞬間の速さ”を，a から t までの $f(x)$ の平均変化率 $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ の $t\to a$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ と考える． この極限値を a における f の変化率あるいは微分係数という．

もう少し正確に述べる． 関数 f の定義域に属す定数 a 及び変数 t について， $t\to a$ のとき $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ が収束するならば，関数 f は a において**微分可能** (differentiable) であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ を a における f の**微分係数** (differential coefficient) という．

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2+3x-4$ と定める． 2 における関数 f の微分係数を調べる．

$f(t)=t^2+3t-4$ ， $f(2)=6$ なので， $t\neq 2$ のとき，

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \frac{t^2+3t-4-6}{t-2} = \frac{t^2+3t-10}{t-2} = \frac{(t+5)(t-2)}{t-2} = t+5 \ .$$

従って，2 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+5) = 2+5 = 7 \ .$$

終

問題 2.5.1　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=x^2-4x+5$ と定める． 3 における関数 g の微分係数を調べよ．

例題　関数 φ は 2 を指数とする冪関数とする： $\varphi(x)=x^2$ ． 各実数 a における関数 φ の微分係数を調べる．

因数分解の公式 $t^2-a^2=(t-a)(t+a)$ を用いる． $t\neq a$ のとき

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} = \frac{t^2-a^2}{t-a} = \frac{(t-a)(t+a)}{t-a} = t+a \ .$$

従って，a における冪関数 x^2 の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{t^2-a^2}{t-a} = \lim_{t\to a}(t+a) = a+a = 2a \ .$$

終

問題 2.5.2　関数 ψ は 3 を指数とする冪関数とする： $\psi(x)=x^3$ ． 各実数 a における関数 ψ の微分係数を調べよ．

冪関数の微分係数について次のようになる：各実数 a に対して，

a における冪関数 x^2 の微分係数は $2a$ ；

a における冪関数 x^3 の微分係数は $3a^2$ ；

a における冪関数 x^4 の微分係数は $4a^3$ ；

a における冪関数 x^5 の微分係数は $5a^4$ ；

$\vdots$ ．

一般的にいうと次の定理が成り立つ．

定理 2.5.1　定数 n が正の整数であるとき，各実数 a に対して，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{t^n-a^n}{t-a} = na^{n-1} \ .$$

証明　変数 t の整式 $P(t)=t^n-a^n$ について $P(a)=a^n-a^n=0$ なので，因数定理より，整式 $P(t)=t^n-a^n$ は $t-a$ で割り切れる． 実際に t^n-a^n を $t-a$ で割ると次のようになる．

$$\begin{array}{r l}
 & t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \\
t-a \,\big) & t^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^n \\
 & \underline{t^n - at^{n-1}} \\
 & \quad at^{n-1} \\
 & \quad \underline{at^{n-1} - a^2t^{n-2}} \\
 & \qquad a^2t^{n-2} \\
 & \qquad \underline{a^2t^{n-2} - a^3t^{n-3}} \\
 & \qquad\quad a^3t^{n-3} \\
 & \qquad\quad \underline{a^3t^{n-3} - a^4t^{n-4}} \\
 & \qquad\qquad\qquad \ddots \quad \underline{\qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad a^{n-2}t^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^{n-2}t^2 - a^{n-1}t} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^{n-1}t - a^n \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^{n-1}t - a^n} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

従って

$$t^n-a^n = (t-a)(t^{n-1}+at^{n-2}+a^2t^{n-3}+a^3t^{n-4}+\cdots+a^{n-3}t^2+a^{n-2}t+a^{n-1}) \ .$$

よって， $t\neq a$ のとき，

$$\frac{t^n-a^n}{t-a} = t^{n-1}+at^{n-2}+a^2t^{n-3}+a^3t^{n-4}+\cdots+a^{n-3}t^2+a^{n-2}t+a^{n-1} \ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある． $t\to a$ のとき， $t\neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a}\frac{t^n-a^n}{t-a} &= \lim_{t\to a}(t^{n-1}+at^{n-2}+a^2t^{n-3}+a^3t^{n-4}+\cdots+a^{n-3}t^2+a^{n-2}t+a^{n-1}) \\
&= a^{n-1}+aa^{n-2}+a^2a^{n-3}+a^3a^{n-4}+\cdots+a^{n-3}a^2+a^{n-2}a+a^{n-1} \\
&= \underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}}_{n \text{ 個の項の和}} \\
&= na^{n-1} \ .
\end{aligned}$$

（証明終り）

定理 2.5.2　定数関数の微分係数は 0 である．

証明　定数関数 f の定義域のある実数 a 及び変数 t について， $f(a)=f(t)$ なので，a における f の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{0}{t-a} = \lim_{t\to a}0 = 0 \ .$$

（証明終り）