## §2.7　微分係数

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった． ここで，変数 $t$ に対して変数 $h$ を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき $h=t-a\to 0$ なので，定理2.3.3より，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，

$$a\ \text{における}\ f\ \text{の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ より極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので，**微分係数**を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と定義する．

> **定義**　関数 $f$ の定義域の実数 $a$ について， $h\to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 $f$ は $a$ において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を $a$ における $f$ の微分係数という．

**例題**　実数全体を定義域とする関数 $g$ を $g(x)=3x^2-5x$ と定める． 微分係数の定義に直接従って，2 における関数 $g$ の微分係数を調べる．

微分係数の定義より，2 における関数 $g$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ ．

$$\begin{aligned}g(2+h)-g(2)&=3(2+h)^2-5(2+h)-(3\cdot 2^2-5\cdot 2)=12h+3h^2-5h\\&=7h+3h^2\ ,\end{aligned}$$

よって，2 における関数 $g$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{7h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(7+3h)=7\ .$$

終

**問題 2.7.1**　実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x)=2x^2-7x$ と定める． 微分係数の定義に直接従って，5 における関数 $f$ の微分係数を調べよ．

**例題**　$\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\psi$ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める． 微分係数の定義に直接従って，4 における関数 $\psi$ の微分係数を調べる．

微分係数の定義より，4 における関数 $\psi$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}$ ．

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ ,\end{aligned}$$

4 における関数 $\psi$ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}=-\frac{6}{7\cdot\displaystyle\lim_{h\to 0}(3h+7)}\\&=-\frac{6}{49}\ .\end{aligned}$$

終

**問題 2.7.2**　$\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\varphi$ を $\varphi(x)=\dfrac{5}{4x-7}$ と定める． 微分係数の定義に直接従って，3 における関数 $\varphi$ の微分係数を調べよ．

次の定理が成り立つ．

**定理 2.7.1**　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば $\displaystyle\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ ．

**証明**　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する． 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ があるので，これを $b$ とおく：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b\ .$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 $h$ と無関係なので，定理2.3.1より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)\\&=0+f(a)=f(a)\ ,\end{aligned}$$

つまり $\displaystyle\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ ．　（証明終り）

この定理より次の定理が導かれる．

**定理 2.7.2**　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば，$f$ は $a$ において連続である．

**証明**　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する． 変数 $h,t$ について $h=t-a$ とする． $t=a+h$ より $f(t)=f(a+h)$ であり， $t\to a$ のとき $h\to 0$ なので，定理2.3.3より

$$\lim_{t\to a}f(t)=\lim_{h\to 0}f(a+h)\ .$$

定理2.7.1より $\displaystyle\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ なので， $\displaystyle\lim_{t\to a}f(t)=f(a)$ ． つまり $f$ は $a$ において連続である．　（証明終り）

つまり，関数 $f$ 及び $f$ の定義域の実数 $a$ について，

$f$ が $a$ において微分可能　ならば　$f$ は $a$ において連続

である． しかしこの逆は必ずしも成たない：関数 $f$ が $a$ において連続であっても $f$ が $a$ において微分可能でないこともある．