

### § 3.3 関数の積・商の微分法

**定理 3.3.1** 微分可能な関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とに対して、関数  $f(x)g(x)$  は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) + f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}.$$

**証明** 微分可能な関数  $f(x)$  と  $g(x)$  及び変数  $x$  の増分  $\Delta x$  に対して、 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x}$  を計算する.  $x$  の増分  $\Delta x$  に対して、 $f(x)$  の増分は  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ ,  $g(x)$  の増分は  $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ ; よって、

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x), \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

$x$  が  $x + \Delta x$  に変化するとき、 $f(x)g(x)$  は  $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$  に変化するので、その増分  $\Delta\{f(x)g(x)\}$  は

$$\begin{aligned} \Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x). \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \frac{\Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x + \Delta x) + f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とは微分可能なので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ , また、定理 2.7.1 より  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ , 更に  $f(x)$  は  $\Delta x$  と無関係なので、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x + \Delta x) + f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x). \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x).$$

**定理 3.3.2** 微分可能な関数  $g(x)$  に対して、関数  $\frac{1}{g(x)}$  は  $g(x) \neq 0$  のとき微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

**証明** 微分可能な関数  $g(x)$  及び変数  $x$  の増分  $\Delta x$  に対して  $\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x}$  を計算する.  $x$  の増分  $\Delta x$  に対する  $g(x)$  の増分は  $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$  なので、

$$g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

$x$  が  $x + \Delta x$  に変化するとき、 $\frac{1}{g(x)}$  は  $\frac{1}{g(x + \Delta x)}$  に変化するので、その増分  $\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}$  は

$$\begin{aligned} \Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} = \frac{g(x) - \{\Delta g(x) + g(x)\}}{g(x + \Delta x)g(x)} \\ &= \frac{-\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} = \frac{-\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)}.$$

関数  $g(x)$  は微分可能なので  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ , また、定理 2.7.1 より  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ , 更に  $g(x)$  は  $\Delta x$  と無関係なので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} \right\}$$

$$= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x)\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)} = -\frac{d}{dx}g(x) \cdot \frac{1}{g(x)g(x)}$$

$$= -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2},$$

故に

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}.$$

(証明終り)

**定理 3.3.3** 微分可能な関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とに対して、関数  $\frac{f(x)}{g(x)}$  は  $g(x) \neq 0$  のとき微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

**証明** 微分可能な関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とに対して、関数  $\frac{f(x)}{g(x)}$  を微分する. 定理 3.3.1 及び定理 3.3.2 より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} + f(x) \left\{ -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \right\} = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

(証明終り)

定理 3.3.3 において  $f(x) = 1$  とおくと、 $\frac{d}{dx}1 = 0$  なので、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot g(x) - 1 \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = \frac{0 \cdot g(x) - \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}.$$

つまり定理 3.3.2 は定理 3.3.3 の特別な場合である.

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = x^3 \sin x$  と定める. 関数  $g$  の導関数  $g'$  を求める.

定理 3.3.1 より、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \sin x) = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 3.3.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin x \cos x$  と定める. 関数  $f$  の導関数  $f'$  を求めよ.

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$  と定める<sup>8)</sup>. 関数  $\varphi$  の導関数  $\varphi'$  を求める.

【解説】 定理 3.3.2 を用いると、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} = 5 \frac{d}{dx} \frac{1}{2 \cos x + 3} \\ &= 5 \frac{-\frac{d}{dx}(2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} = 5 \frac{-2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2}. \end{aligned}$$

定理 3.3.3 を用いても微分できる:  $\frac{d}{dx}5 = 0$  なので、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}5 \cdot (2 \cos x + 3) - 5 \frac{d}{dx}(2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} = \frac{0 - 5 \cdot 2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 3.3.2** 実数全体を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{2}{3 \sin x + 4}$  と定める. 関数  $\psi$  の導関数  $\psi'$  を求めよ.

**例題** 変数  $t$  の関数  $x = \frac{\sin t}{t^3}$  を微分する.

定理 3.3.3 より、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt} \sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \frac{d}{dt} t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6} \\ &= \frac{t \cos t - 3 \sin t}{t^4}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 3.3.3** 変数  $u$  の関数  $v = \frac{\cos u}{u^4}$  を微分せよ.

**例題** 変数  $u$  の関数  $\frac{4u - 5}{u^2 + 3}$  を微分する.

定理 3.3.3 より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{4u - 5}{u^2 + 3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u - 5) \cdot (u^2 + 3) - (4u - 5) \frac{d}{du}(u^2 + 3)}{(u^2 + 3)^2} \\ &= \frac{4(u^2 + 3) - (4u - 5) \cdot 2u}{(u^2 + 3)^2} = \frac{4u^2 + 12 - 8u^2 + 10u}{(u^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-4u^2 + 10u + 12}{(u^2 + 3)^2}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

**問題 3.3.4** 変数  $x$  の関数  $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 4}$  を微分せよ.

関数  $f$  の定義域の要素  $a$  における  $f$  の微分係数は、 $f$  の導関数  $f'$  の  $a$  における値  $f'(a)$  であった.

**例題** 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^2 \ln x$  と定める. 自然対数の底  $e$  に対して、 $e^3$  における  $f$  の微分係数を求める.

定理 3.3.1 より、 $f$  の導関数  $f'$  は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = \frac{d}{dx}x^2 \cdot \ln x + x^2 \frac{d}{dx} \ln x = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(1 + 2 \ln x).$$

$e^3$  における  $f$  の微分係数は、

$$f'(e^3) = e^3(1 + 2 \ln e^3) = e^3(1 + 2 \cdot 3) = 7e^3. \quad \text{終}$$

**問題 3.3.5** 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 \ln x$  と定める. 自然対数の底  $e$  に対して、 $e^4$  における  $f$  の微分係数を求めよ.

<sup>8)</sup> 各実数  $x$  について、 $\sin x \geq -1$  より  $2 \sin x \geq -2$  なので  $2 \sin x + 3 \geq 1$ . なので  $2 \cos x + 3$  の値が 0 になることはない.