§3.4　いくつかの関数の導関数

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として，定理3.3.3と微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ， $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ とを用いる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\dfrac{d}{dx}\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \ .
\end{aligned}
$$

更に，次の公式が成り立った： $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ [9)]．

> **定理 3.4.1**　正接関数 $\tan x$ の導関数は
> $$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (\cos x \neq 0) \ .$$

例題　区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ と定める． 関数 φ の導関数 φ' を求める．

定理3.3.3より，

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x^2} &= \frac{\dfrac{d}{dx}\tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \dfrac{d}{dx}x^2}{(x^2)^2} = \frac{\sec^2 x \cdot x^2 - \tan x \cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{x \sec^2 x - 2\tan x}{x^3} \ .
\end{aligned}
$$

終

問題 3.4.1　区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定める． f の導関数 f' を求めよ．

問題 3.4.2　変数 t の関数 $x = \dfrac{\tan t}{t^3}$ を微分せよ．

例題　冪関数 x^{-3} ($x \neq 0$) を微分する： $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ なので，定理3.3.2より，

$$\frac{d}{dx}x^{-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^3} = -\frac{\dfrac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -3\frac{1}{x^4} = -3x^{-4} \ .$$

終

一般的に，整数指数の冪関数について次の定理が成り立つ．

> **定理 3.4.2**　整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は
> $$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (x \neq 0) \ .$$

証明　$n \geq 1$ のときは定理3.1.1そのものである．

$n = 0$ のときは，定理3.1.2より $\dfrac{d}{dx}x^n = \dfrac{d}{dx}x^0 = \dfrac{d}{dx}1 = 0$ ，また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ ，従って $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ．

$n \leq -1$ のときは， $n = -m$ とおく； m は正の整数なので，指数法則及び定理3.3.2と定理3.1.1とより

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{\dfrac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} \ .
\end{aligned}
$$

（証明終り）

例題　区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x^5}$ と定める． ψ の導関数 ψ' を求める．

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{3x^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{-5}\right) = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}x^{-5} &= \frac{2}{3}(-5x^{-6}) \\
&= -\frac{10}{3x^6} \ .
\end{aligned}
$$

終

問題 3.4.3　区間 $(0, \infty)$ を定義域とするの関数 g を $g(x) = \dfrac{3}{2x^4}$ と定める． g の導関数 g' を求めよ．

---

9) 正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ と定義した（0.8節参照）．