

### §3.8 合成関数の微分法

関数  $\varphi(x)$  の値域が関数  $f(x)$  の定義域に含まれるとき、 $\varphi(x)$  と  $f(x)$  との合成関数  $f(\varphi(x))$  ができた。この合成関数  $f(\varphi(x))$  の微分法の公式をもう少し追及する。

関数  $\varphi(x)$  と  $f(x)$  とは微分可能であるとする。まず、変数  $t$  を  $t = \varphi(x)$  とおく。定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx};$$

ここで、 $t = \varphi(x)$  なので、

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f(\varphi(x)), \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'(\varphi(x)), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x),$$

従って

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \frac{d}{dx}\varphi(x).$$

**定理 3.8** 微分可能な関数  $\varphi(x)$  と  $f(x)$  について、関数  $\varphi(x)$  の値域が関数  $f(x)$  の定義域に含まれるとき、合成関数  $f(\varphi(x))$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \frac{d}{dx}\varphi(x).$$

定理 3.8 の公式において  $\varphi(x)$  を  $\square$  で置き換えた公式もどきを示す：

$$\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \frac{d}{dx}(\square).$$

つまり、 $f(\square)$  を微分するには、外側の関数  $f$  だけを微分して  $f$  の中身の  $\square$  はそのままにした式  $f'(\square)$  に  $f$  の中身  $\square$  を微分した式  $\frac{d}{dx}(\square)$  を掛ける。

**例解** 変数  $x$  の関数  $\sin \frac{5x+4}{3}$  を微分する。3.5 節で述べた方法では、 $\frac{5x+4}{3}$  を新しい変数  $t$  とかに置き換えて微分した。できればこのように置き換えることなく微分したい。定理 3.8 の公式もどき  $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \frac{d}{dx}(\square)$  において

$f(x) = \sin x$  とおくと、 $f'(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  なので、

$$\frac{d}{dx} \sin(\square) = \cos(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square).$$

この等式において  $\square$  に  $\frac{5x+4}{3}$  を代入する。

$$\frac{d}{dx} \sin \frac{5x+4}{3} = \cos \frac{5x+4}{3} \cdot \frac{d}{dx} \frac{5x+4}{3} = \cos \frac{5x+4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cos \frac{5x+4}{3}. \quad \text{終}$$

**例題** 変数  $x$  の関数  $\cos \frac{\pi(3x-2)}{5}$  を微分する。

【解説】 定理 3.8 の公式もどき  $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \frac{d}{dx}(\square)$  において  $f(x) = \cos x$  とおくと、 $f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$  なので、

$$\frac{d}{dx} \cos(\square) = -\sin(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square).$$

この等式において  $\square$  に  $\frac{\pi(3x-2)}{5}$  を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi(3x-2)}{5} &= \cos \frac{\pi(3x-2)}{5} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin \frac{\pi(3x-2)}{5} \cdot \frac{3\pi}{5} \\ &= -\frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi(3x-2)}{5}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 3.8.1** 変数  $x$  の関数  $\tan \frac{\pi(5x-4)}{7}$  を微分せよ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $\ln|e^x-3|$  を微分する。

【解説】 定理 3.8 の公式もどき  $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \frac{d}{dx}(\square)$  において  $f(x) = \ln|x|$  とおくと、 $f'(x) = \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$  なので、

$$\frac{d}{dx} \ln|\square| = \frac{1}{\square} \frac{d}{dx}(\square).$$

この等式において  $\square$  に  $e^x-3$  を代入する。

$$\frac{d}{dx} \ln|e^x-3| = \frac{1}{e^x-3} \frac{d}{dx}(e^x-3) = \frac{1}{e^x-3} e^x = \frac{e^x}{e^x-3}. \quad \text{終}$$

**問題 3.8.2** 変数  $x$  の関数  $\ln|3e^x-5|$  を微分せよ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $(\tan^{-1}x)^3$  を微分する。

【解説】  $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$  なので  $\frac{d}{dx}(\square)^3 = 3(\square)^2 \frac{d}{dx}(\square)$ 。この等式において  $\square$  に  $\tan^{-1}x$  を代入する。

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)^3 = 3(\tan^{-1}x)^2 \frac{d}{dx} \tan^{-1}x = 3(\tan^{-1}x)^2 \frac{1}{1+x^2} = \frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}. \quad \text{終}$$

**問題 3.8.3** 変数  $x$  の関数  $(\sin^{-1}x)^4$  を微分せよ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{\frac{6}{5x+7}}$  を微分する。

【解説】  $\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}$ 。  $\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$  なので

$\frac{d}{dx}(\square)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\square)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx}(\square)$ 。この等式において  $\square$  に  $5x+7$  を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{6}{5x+7}} &= \frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{6} \frac{d}{dx}(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{6} \left( -\frac{1}{2} \right) (5x+7)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx}(5x+7) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{(5x+7)^3}} \cdot 5 \\ &= -5\sqrt{\frac{3}{2(5x+7)^3}}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 3.8.4** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{\frac{6}{x^2+5}}$  を微分せよ。

**例題** 変数  $t$  の関数  $e^{\sin t}$  を微分する。

【解説】 微分公式  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$  より  $\frac{d}{dt}e^{\square} = e^{\square} \frac{d}{dt}(\square)$ 。この等式において  $\square$  に  $\sin t$  を代入する。

$$\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t} \frac{d}{dt} \sin t = e^{\sin t} \cos t. \quad \text{終}$$

**問題 3.8.5** 変数  $t$  の関数  $e^{\tan t}$  を微分せよ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $\sin^{-1}x^3$  を微分する。

【解説】  $\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  より  $\frac{d}{dx} \sin^{-1}(\square) = \frac{1}{\sqrt{1-(\square)^2}} \frac{d}{dx}(\square)$ 。この等式において  $\square$  に  $x^3$  を代入する。

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot \frac{d}{dx}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}. \quad \text{終}$$

**問題 3.8.6** 変数  $x$  の関数  $\tan^{-1}\sqrt{x}$  を微分せよ。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x \sin(4x+3)$  と定める。 $f$  の導関数  $f'$  を求める。

$$\frac{d}{dx} \sin(4x+3) = \cos(4x+3) \cdot \frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3) \cdot 4 = 4 \cos(4x+3).$$

よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{x^3 \sin(4x+3)\} = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \sin(4x+3) + x^3 \cdot \frac{d}{dx} \sin(4x+3) \\ &= 3x^2 \cdot \sin(4x+3) + x^3 \cdot 4 \cos(4x+3) \\ &= 3x^2 \sin(4x+3) + 4x^3 \cos(4x+3). \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 3.8.7** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = e^x \cos(3x+1)$  と定める。 $g$  の導関数  $g'$  を求めよ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $y = \frac{e^{2x-3}}{x^3}$  の導関数  $\frac{dy}{dx}$  を求める。

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3} \frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3} \cdot 2 = 2e^{2x-3}.$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{e^{2x-3}}{x^3} = \frac{\frac{d}{dx}e^{2x-3} \cdot x^3 - e^{2x-3} \cdot \frac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} \\ &= \frac{2e^{2x-3} \cdot x^3 - e^{2x-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2xe^{2x-3} - 3e^{2x-3}}{x^4} \\ &= \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 3.8.8** 変数  $t$  の関数  $x = \frac{\sin t}{e^{3t-5}}$  の導関数  $\frac{dx}{dt}$  を求めよ。