

§ 3.9 第2次導関数

関数 f が微分可能で、更にその導関数 f' が微分可能であるとき、 f は2回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第2次導関数といい、 f'' と書き表す。つまり、 f の第2次導関数の値 $f''(x)$ は、 $f(x)$ を微分した結果 $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}.$$

$f''(x)$ を $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ とも書き表す。

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}.$$

変数 x, y について $y = f(x)$ のとき、 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ を $\frac{d^2y}{dx^2}$ 、 y'' などとも書き表す； $\frac{d^2y}{dx^2}$ は、 y を微分した結果 $\frac{dy}{dx}$ をもう一度微分した結果である：

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める。 f の第2次導関数 f'' を求める。

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3.$$

従って

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 8x + 3) = 6x - 8.$$

問題 3.9.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定める。 f の第2次導関数 f'' を求めよ。

例題 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第2次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1).$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\{x^2(3 \ln x + 1)\} = \frac{d}{dx}x^2 \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(3 \ln x + 1) \\ &= 2x \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot 3 \frac{1}{x} = 2x(3 \ln x + 1) + 3x \\ &= x(6 \ln x + 5). \end{aligned}$$

問題 3.9.2 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第2次導関数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求めよ。

例題 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第2次導関数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求めよ。

$u = 3t$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \sin 3t = \frac{d}{dt} \sin u = \frac{d}{du} \sin u \cdot \frac{du}{dt} = \cos u \cdot \frac{d}{dt}(3t) = \cos 3t \cdot 3 \\ &= 3 \cos 3t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(3 \cos 3t) = 3 \frac{d}{dt} \cos u = 3 \frac{d}{du} \cos u \cdot \frac{du}{dt} \\ &= 3(-\sin u) \cdot \frac{d}{dt}(3t) = -3 \sin 3t \cdot 3 \\ &= -9 \sin 3t. \end{aligned}$$

問題 3.9.3 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x + 3)$ と定める。 g の第2次導関数 g'' を求めよ。