第3章の補遺1　逆関数の微分法

3.7節で用いた逆三角関数の微分法を一般化して，関数 f の導関数から f の逆関数の導関数を導く． 微分可能な関数 f の逆関数 g があるとする． 関数 g も微分可能であるとする． g の導関数 g' を求める．

逆関数の性質より $f\bigl(g(x)\bigr) = x$ ． この式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx} f\bigl(g(x)\bigr) = \frac{d}{dx} x \ .$$

この等式の左辺は，合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx} f\bigl(g(x)\bigr) = f'\bigl(g(x)\bigr)\, g'(x) \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx} x = 1$ ；従って

$$f'\bigl(g(x)\bigr)\, g'(x) = 1 \ .$$

よって， $f'\bigl(g(x)\bigr) \neq 0$ ならば

$$g'(x) = \frac{1}{f'\bigl(g(x)\bigr)} \ .$$

こうして次の定理が導かれた：関数 g が微分可能な関数 f の逆関数であるとき，$f'\bigl(g(x)\bigr) \neq 0$ となる範囲で g も微分可能で，

$$g'(x) = \frac{1}{f'\bigl(g(x)\bigr)} \quad \bigl(\ f'\bigl(g(x)\bigr) \neq 0\ \bigr) \ .$$