

第3章の補遺2 対数微分法

関数 f, g は微分可能で $f(x) > 0$ とする. 関数 $f(x)^{g(x)}$ を微分する. そのために, $y = f(x)^{g(x)}$ とおいて, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)}$ を求める. $y = f(x)^{g(x)}$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x).$$

微分すると

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \{g(x) \ln f(x)\}.$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx};$$

右辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{g(x) \ln f(x)\} &= \frac{d}{dx} g(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \frac{d}{dx} \{\ln f(x)\} \\ &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) \\ &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}; \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}, \\ \frac{dy}{dx} &= y \left\{ g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}. \end{aligned}$$

このようにして $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)}$ を計算できる. このような微分法を対数微分法という.

例題 変数 x の関数 $x^{\sin x}$ を微分する.

【解説】 $y = x^{\sin x}$ とおく. 対数の性質より,

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x.$$

従って

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (\sin x \ln x).$$

この等式の左辺は, 合成関数の微分公式より,

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

右辺は

$$\frac{d}{dx} (\sin x \ln x) = \frac{d}{dx} \sin x \cdot \ln x + \sin x \frac{d}{dx} \ln x = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x};$$

従って,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}, \\ \frac{dy}{dx} &= y \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right), \end{aligned}$$

$y = x^{\sin x}$ なので

$$\frac{d}{dx} x^{\sin x} = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right). \quad \square$$

問題 3.補遺2.1 変数 x の関数 x^x を微分する. $y = x^x$ とおく. 対数の性質より,

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x.$$

従って

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln x).$$

この両辺を計算して $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

問題 3.補遺2.2 変数 x の関数 $x^{\ln x}$ を微分せよ.

問題 3.補遺2.3 変数 x の関数 $x^{\frac{1}{x}}$ を微分せよ.

問題 3.補遺2.4 変数 x の関数 $(\sin x + 2)^x$ を微分しなさい.