

§ 4.2 関数の極限の性質

2.3節の定理2.3.1, 定理2.3.2, 定理2.3.3は, 関数の独立変数 x について $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ の場合もそのまま成り立つ.

定理 4.2.1 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\};$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

この定理より, 例えば次のことが導かれる: 変数 x と無関係な定数 k について, $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$ なので, 関数 f について $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + k\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} k = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + k,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{kf(x)\} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} k \right) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

定理 4.2.2 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

定理 4.2.3 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

定理4.2.3より次の定理が導かれる.

定理 4.2.4 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 定数 k は実数とする. 変数 x の関数 $f(x)$ について, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = 0$.

証明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ とする. $y = f(x)$ とおくと, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ とする. $y = -f(x)$ とおくと, $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ より $y \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{-y} = -k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = -k \cdot 0 = 0.$$

(証明終り)

例題 変数 x の関数 $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 0 \text{ なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2}\right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9.$$

9において関数 \sqrt{x} は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2}\right)} = \sqrt{9} = 3. \quad \text{終}$$

問題 4.2.1 変数 x の関数 $\log_3\left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

例題 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$y = 2x - 5 \text{ とおく. } \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^y. \quad x \rightarrow \infty \text{ のとき } y \rightarrow \infty \text{ なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = \infty.$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = 0. \quad \text{終}$$

問題 4.2.2 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

問題 4.2.3 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

例題 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \text{ なので,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t}{3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

$\frac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2}$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t}{3} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

$-\frac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}. \quad \text{終}$$

問題 4.2.4 変数 y の関数 $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

例題 変数 x の関数 $x \sin \frac{2}{x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$y = \frac{2}{x} \text{ とおく. } x = \frac{2}{y} \text{ なので}$$

$$x \sin \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \sin y = 2 \frac{\sin y}{y}.$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{2}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sin y}{y}\right) = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2. \quad \text{終}$$

問題 4.2.5 変数 y の関数 $y \sin \frac{3}{2y}$ について, $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて, $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するときは, 定理4.2.1より次のような計算ができる:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} + \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\}.$$

しかし, $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ あるいは $g(x)$ が発散するときは, このように \lim を分けることができない. 例えば, $x \rightarrow \infty$ のとき x^3 及び x^2 は ∞ に発散するので, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2)$ を $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - \lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ に変形するのは間違いである; このときは $x^3 - x^2$ 自体の極限を考えなければならない.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことは一般的にいえる.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束するならば, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ならば, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ のとき, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\}$ および $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ はどうなるか一般的には分からない. また, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\}$ はどうなるか一般的には分からない.

例題 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について, $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{5}{4} > 1 \text{ より } \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty \text{ なので, } \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty \text{ よって}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty. \quad \text{終}$$

問題 4.2.6 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8$ について, $u \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

問題 4.2.7 変数 y の関数 $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y$ について, $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

例題 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \text{ なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty \text{ なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \infty. \quad \text{終}$$

問題 4.2.8 変数 x の関数 $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.