

## §4.4 関数の右極限と左極限

変数  $x$  の値を定数  $a$  に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$  である範囲だけで考えるときと、 $x < a$  である範囲だけで考えるときとがある。 $x > a$  である範囲だけで  $x$  の値を  $a$  に近づけることを  $x \rightarrow a+0$  と書き表し、このときの極限を右極限という。また、 $x < a$  である範囲だけで  $x$  の値を  $a$  に近づけることを  $x \rightarrow a-0$  と書き表し、このときの極限を左極限という。数直線上において、右極限を表す  $x \rightarrow a+0$  は  $x$  の値を  $a$  の右側から  $a$  に近づけることであり、左極限を表す  $x \rightarrow a-0$  は  $x$  の値を  $a$  の左側から  $a$  に近づけることである。



**例** 区間  $[0, 4]$  を定義域とする関数  $\varphi$  を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x-5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

変数  $x$  について、 $2 \leq x \leq 4$  のとき  $\varphi(x) = 3x-5$  なので、 $x > 2$  である範囲で  $x$  の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$  の値は  $3 \cdot 2 - 5 = 1$  に限りなく近づいていく。このようなとき、1 を  $\varphi(x)$  の右極限值とい

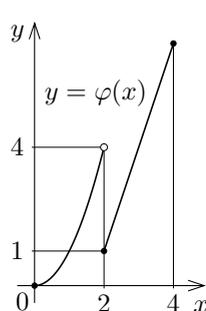
い、この右極限値を  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x) = 1.$$

また、 $0 \leq x < 2$  のとき  $\varphi(x) = x^2$  なので、 $x < 2$  である範囲で  $x$  の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$  の値は  $2^2 = 4$  に限りなく近づいていく。このようなとき、4 を  $\varphi(x)$  の左極限値といい、この左極限値を  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x) = 4.$$

終



一般的に述べる。関数  $f$  及び実数  $a$  について、 $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $x > a$  となる範囲で  $a$  に限りなく近づけることができ、

$x$  の値を  $x > a$  となる範囲で  $a$  に限りなく近づけると

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくと

とき、 $x \rightarrow a+0$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するとい、 $c$  を  $f$  の右極限 (値) という。  $x \rightarrow a+0$  のとき関数  $f(x)$  が収束するならば、そのときの右極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

と書き表す。また、 $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $x < a$  となる範囲で  $a$  に限りなく近づけることができ、

$x$  の値を  $x < a$  となる範囲で  $a$  に限りなく近づけると

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくと

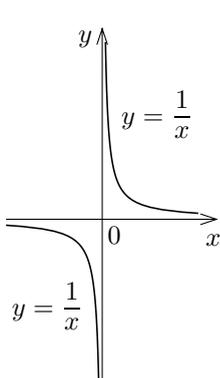
とき、 $x \rightarrow a-0$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するとい、 $c$  を  $f$  の左極限 (値) という。  $x \rightarrow a-0$  のとき関数  $f(x)$  が収束するならば、そのときの左極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

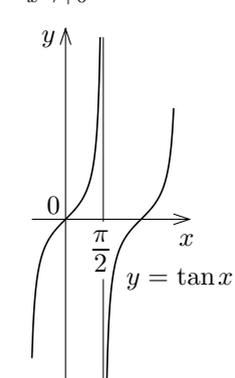
と書き表す。特に  $a=0$  のとき、 $x \rightarrow 0+0$  を  $x \rightarrow +0$  と、 $x \rightarrow 0-0$  を  $x \rightarrow -0$  と略記する。

関数の右極限および左極限においても  $\infty$  あるいは  $-\infty$  に発散することがある。例を挙げる：

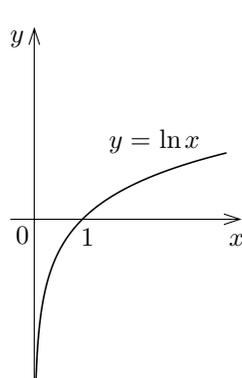
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} &= \infty, & \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x &= \infty; \\ \lim_{x \rightarrow +0} \ln x &= -\infty. \end{aligned}$$



$y = \frac{1}{x}$  のグラフ



$y = \tan x$  のグラフ



$y = \ln x$  のグラフ

次の定理が成り立 (証明は省く)。

**定理 4.4** 関数  $f$  及び実数  $a, c$  について、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c.$$

**例題** 区間  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $g$  を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$g(x)$  の右極限  $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$  と左極限  $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$  とを調べる。

変数  $x$  について、 $x \rightarrow 5+0$  のとき、

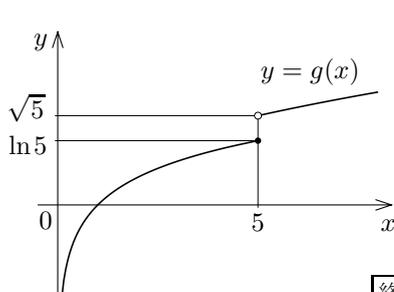
$x > 5$  なので  $g(x) = \sqrt{x}$ 、よって

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \sqrt{x} = \sqrt{5}.$$

$x$  について、 $x \rightarrow 5-0$  のとき、 $x < 5$  なの

ので  $g(x) = \ln x$ 、よって

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \ln x = \ln 5.$$



終

**問題 4.4.1** 区間  $(0, 10]$  を定義域とする関数  $f$  を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (0 < x < 8 \text{ のとき}) \\ x^{\frac{4}{3}} & (8 \leq x \leq 10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$  の右極限  $\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x)$  と左極限  $\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x)$  とを調べなさい。

定理 4.2.3 として次のことを述べた。

定数  $a$  と  $b$  とは実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする。関数  $f(x)$  と関数  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  があるとす。  $y = f(x)$  とおく。  $x \rightarrow a$  のとき  $y \rightarrow b$ 、 $y \neq b$  で、 $y \rightarrow b$  のとき  $g(y)$  が収束するならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

この定理は  $x \rightarrow a+0$  のとき、 $x \rightarrow a-0$  のときなども成り立つ。

**例題** 変数  $x$  の関数  $\frac{1}{\ln x}$  について  $x \rightarrow +0$  のときの極限を調べる。

$y = \ln x$  とおく。  $x \rightarrow +0$  のとき  $y = \ln x \rightarrow -\infty$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y} = 0.$$

終

**例題** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}$  について  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$  のときの極限を調べる。

$y = \tan x$  とおく。  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$  のとき  $y = \tan x \rightarrow \infty$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0.$$

終

**問題 4.4.2** 変数  $x$  の関数  $(\log_2 x)^3$  について  $x \rightarrow +0$  のときの極限を調べよ。

**問題 4.4.3** 変数  $x$  の関数  $\frac{5}{3 + \tan x}$  について  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0$  のときの極限を調べよ。

**問題 4.4.4** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$  について  $x \rightarrow -0$  のときの極限を調べよ。