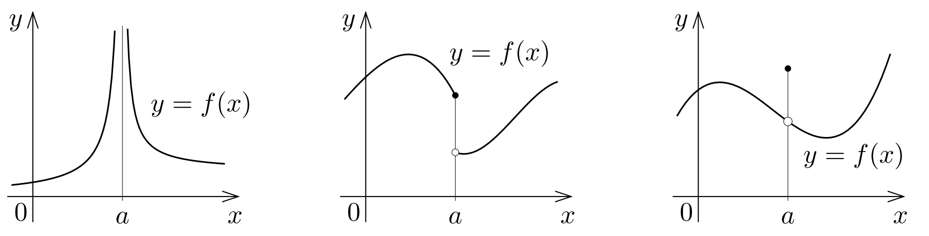
§4.5　関数の連続性

2.2節で述べたように，関数 f の定義域の実数 a について，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となるとき，a において f は**連続**であるという．詳しくいうと，a において f が連続であるとは次の3条件が成り立つことである：

(1)　a が f の定義域に属して（つまり a に対する f の値 $f(a)$ があって），
(2)　$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束して（つまり極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ があって），更に
(3)　$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となる．

実数 a において関数 f が連続でない状況は，関数のグラフで表現すると，例えば以下のような状況がある．



関数 f が実数 a において連続でない事例

関数 f が連続であるというのは，f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということであった．2.2節で述べたように，冪関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数は総て連続である [1]．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．

〔方針〕 関数 f が 7 において連続であるとは，$\lim_{x \to 7} f(x) = f(7)$ となることである．この等式が成り立つかどうか調べる．極限値の公式 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ を用いる．

〔解答〕 $y = x - 7$ とおく．$2x - 14 = 2y$ ．$x \neq 7$ のとき，

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} .$$

$x \to 7$ のとき $y = x - 7 \to 0$ なので，

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y \to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y \to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

また，$x = 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{2}$ なので $f(7) = \dfrac{1}{2}$ ．$\lim_{x \to 7} f(x) = f(7)$ なので，関数 f は 7 において連続である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (\ x \neq 3\ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x = 3\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x \neq 0\ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x = 0\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる．

〔方針〕 関数 φ が 0 において連続であるとは，$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$ となることである．この等式が成り立つかどうか調べる．自然対数の底 e の定義 $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を用いる．

〔解答〕 $x \neq 0$ のとき，

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}2} = \left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 .$$

$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので，

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = \left\{\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = e^2 .$$

また，$x = 0$ のとき $\varphi(x) = 2e$ なので，$\varphi(0) = 2e$ ．従って $\lim_{x \to 0} \varphi(x) \neq \varphi(0)$ ．故に関数 φ は 0 において連続でない．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.2}}$　区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (\ x \neq 0\ \text{のとき}) \\ e^3 & (\ x = 0\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べよ．

連続な2つの関数の和・差・積などはやはり連続である．

定理 4.5.1　関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする．このとき，関数 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ も実数 a において連続である．更に，$g(a) \neq 0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である．

証明　例として，関数 $f(x)g(x)$ が実数 a において連続であることを示す．関数 $f(x)$, $g(x)$ は実数 a において連続なので，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) , \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a) .$$

従って定理 1.3.1 より

$$\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x \to a} g(x)\right\} = f(a)g(a) .$$

つまり関数 $f(x)g(x)$ は実数 a において連続である．（証明終り）

更に，連続関数と連続関数との合成関数はやはり連続である．

定理 4.5.2　関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが連続であるならば，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ も連続である．

区間 I が関数 f の定義域に含まれるとき，I において f が連続であるとは，区間 I の各実数において f が連続であることである．

---

[1] 例えば冪関数 x^{-1} つまり $\dfrac{1}{x}$ は 0 において連続ではない．しかし 0 は定義域に属さない．関数が連続であるということは，定義域に属す各実数において連続であることなので，関数 $\dfrac{1}{x}$ は連続である．