第４章の補遺２　２次関数のグラフの接線

xy 座標平面において，方程式 $y = px + q$ （p, q は定数） が表す直線が２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ （a, b, c は定数で $a \neq 0$ ） のグラフの接線である条件を求める．$f(x) = ax^2 + bx + c$ ，$g(x) = px + q$ とおく．

直線 $y = g(x)$ が関数 $y = f(x)$ のグラフの接線であると仮定する．その接点の座標を (u, v) とおく．接点 (u, v) が $y = f(x)$ のグラフ及び $y = g(x)$ のグラフに属すので，

$$f(u) = g(u) = v\ .$$

$f(u) = g(u)$ より $au^2 + bu + c = pu + q$ ，つまり

$$au^2 + (b-p)u + c - q = 0\ . \tag{1}$$

また，点 (u, v) における $y = f(x)$ のグラフの接線の傾き $f'(u)$ が直線 $y = px + q$ の傾きなので $f'(u) = p$ ； $f'(u) = 2au + b$ なので，$2au + b = p$ ，よって $u = \dfrac{p-b}{2a}$ ．これを等式 (1) に代入すると，

$$a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + (b-p)\frac{p-b}{2a} + c - q = 0\ .$$
$$-\frac{(b-p)^2}{4a} + c - q\ ,$$
$$(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0\ .$$

故に，

直線 $y = g(x)$ が $y = f(x)$ のグラフに接するならば $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ ．

逆に $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ と仮定する． $u = \dfrac{p-b}{2a}$ ，$v = f(u)$ とおく．

$$\begin{aligned} f(u) - g(u) &= a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + b\frac{p-b}{2a} + c - \left(p\frac{p-b}{2a} + q\right) \\ &= \frac{(p-b)^2 + 2b(p-b) + 4ac - 2p(p-b) - 4aq}{4a} \\ &= \frac{-(p-b)^2 + 4a(c-q)}{4a} = -\frac{(b-p)^2 - 4a(c-q)}{4a} \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

よって $f(u) = g(u) = v$ ． 従って点 (u, v) は $y = f(x)$ のグラフ及び $y = g(x)$ のグラフに属す． 更に，$f'(x) = 2ax + b$ なので

$$f'(u) = 2a\frac{p-b}{2a} + b = p\ .$$

つまり関数 $y = f(x)$ のグラフの点 (u, v) における接線の傾きは直線 $y = g(x)$ の傾きと一致する．故に，

$(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ ならば直線 $y = g(x)$ は $y = f(x)$ のグラフに接する．

こうして次のことが分かる：直線 $y = px + q$ が２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフに接する条件は $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ ． この条件は，言い替えると，x に関する２次方程式 $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$ の判別式の値が 0 になることである．

定理　定数 a, b, c, p, q は実数で $a \neq 0$ とする． xy 座標平面において，直線 $y = px + q$ が２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフに接する条件は，x に関する２次方程式 $ax^2 + bx + c = px + q$ を整理した方程式 $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$ の判別式の値が 0 になることである．