

第4章の補遺3 自然対数の底

2.9節において、特別な定数 e を次のように定義した：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} .$$

そしてこの定数 e を自然対数の底といった。しかし、通常、自然対数の底 e は別のやり方で定義される。

次の定理が成り立つ（証明は省く）。

定理 数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ は収束する。

この数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ の極限值が定数 e であると定義する：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

このように定義すると次の定理が成り立つ（証明は省く）。

定理

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

この定理から更に次の定理が導かれる（証明は省く）。

定理

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

この定理が2.9節において $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ と定めたことの根拠である。