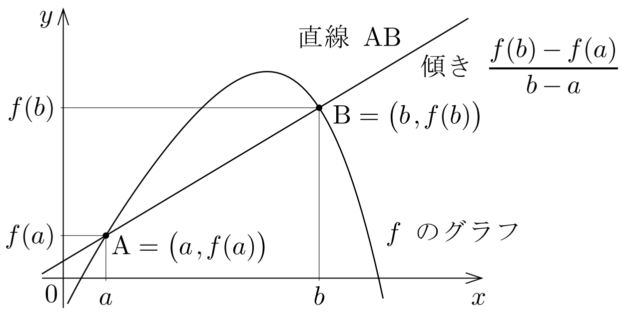
§5.2　平均値の定理

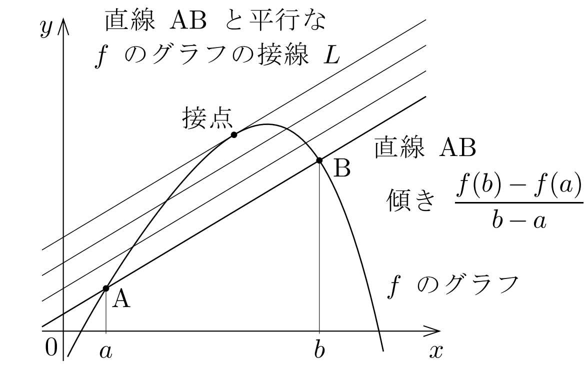
実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面において，関数 f のグラフに属す異なる 2 点 $\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ とが属す直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．直線 AB に平行な直線を色々考えると，それらの中に f のグラフの接線 L がある．f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおく．2.6 節で述べたように，f のグラフの点 $\bigl(c,f(c)\bigr)$ における接線 L の傾きは，c における f の微分係数 $f'(c)$ である．直線 AB と接線 L とは平行なので，直線 AB の傾き $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と接線 L の傾き $f'(c)$ とは等しい：

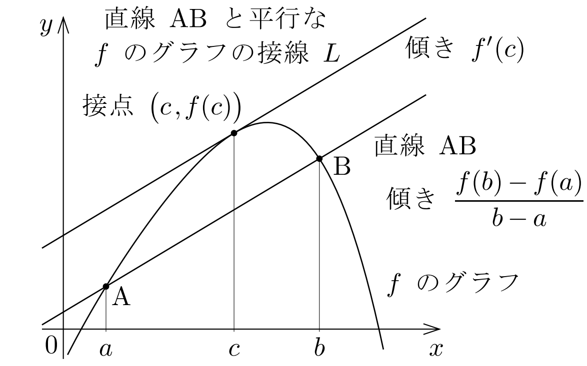
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ ,$$

両辺に $b-a$ を掛けると

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ .$$







このように，$a<c<b$ かつ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ である実数 c がある．このことは平均値の定理[1]といわれる重要な定理である．

定理（平均値の定理）　実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f が区間 $[a,b]$ において微分可能である[2]ならば，次のような実数 c がある：

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\quad \text{かつ}\quad a<c<b\ .$$

平均値の定理より次の定理が導かれる．区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

定理 5.2.1　区間 I を定義域とする関数 f について，I において $f'(x)=0$ ならば，関数 f は定数関数である．

証明　区間 I において $f'(x)=0$ と仮定する．u,v は I に属す任意の実数とする．
　$u<v$ とする．f は I で微分可能なので，f は区間 $[u,v]$ で微分可能である．従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)\ ,\qquad u<w<v\ .$$

$u<w<v$ より実数 w は区間 I に属すので，仮定より $f'(w)=0$ ；よって $f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)=0$ なので，$f(u)=f(v)$ ．
　同様に，$u>v$ のときも $f(u)=f(v)$ ．（証明終り）

更に次の定理が導かれる．

定理 5.2.2　微分可能な関数 f と g とについて，区間 I において $g'(x)=f'(x)$ ならば，ある定数 c をとると I の各実数 x について $g(x)=f(x)+c$ ．

証明　微分可能な関数 f と g とについて，区間 I において $g'(x)=f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定義する：

$$h(x)=g(x)-f(x)\ .$$

I において，$g'(x)-f'(x)=0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{d}{dx}\{g(x)-f(x)\}=\frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}f(x)=g'(x)-f'(x)=0\ .$$

従って，上述の定理 5.2.1 より関数 h は定数関数なので，ある定数 c をとると，I において $h(x)=c$ ；$h(x)=g(x)-f(x)$ なので，I において $g(x)-f(x)=c$ つまり $g(x)=f(x)+c$ ．（証明終り）

---

[1] 平均値の定理といわれる定理は幾つかある．この定理はラグランジュの平均値の定理といわれる．

[2] この条件は少し緩めることができる．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続で区間 (a,b) において微分可能であれば充分である．