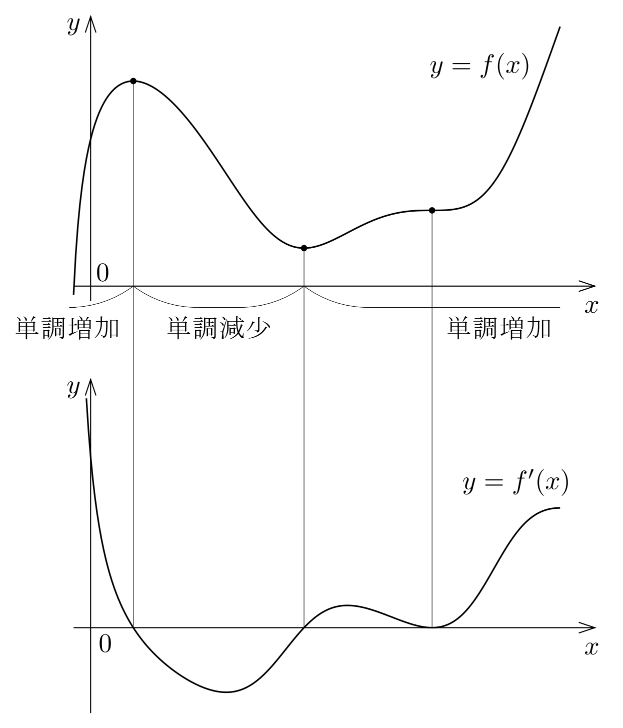
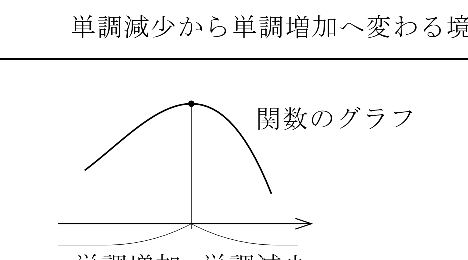
§ 5.4　関数の値の増減と極値

微分可能な関数 f とその導関数 f' とについて，xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとを縦に揃えて描くと例えば右図のようになる．

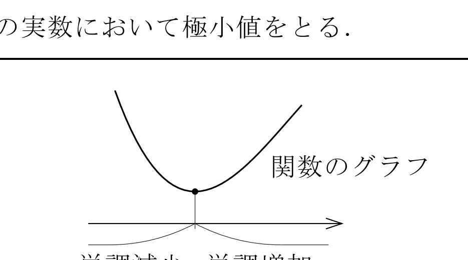


定理 5.1 として述べたように微分可能な関数 f が実数 p において極値をとるならば $f'(p)=0$ なので，f が実数 p において極値をとるような p を捜すために，$f'(p)=0$ となる実数 p を求める． そして更に，極大値をとるか極小値をとるかを判定するために次の定理を用いる（その証明は省く）．

> **定理**　連続な関数は，独立変数の値を大きくしていくとき，
> 単調増加から単調減少へ変わる境目の実数において極大値をとり，
> 単調減少から単調増加へ変わる境目の実数において極小値をとる．



単調増加から単調減少へ変わる境目



単調減少から単調増加へ変わる境目

$\boxed{\text{例解}}$　実数全体において微分可能な関数 f について，

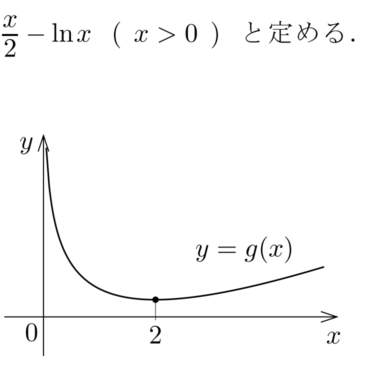
$$x<7 \text{ のとき } f'(x)<0 \ , \quad x>7 \text{ のとき } f'(x)>0$$

とする． 区間 $(-\infty,7]$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x)<0$ なので，定理 5.3.1 より，f は区間 $(-\infty,7]$ において単調減少である． また，区間 $[7,\infty)$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x)>0$ なので，f は区間 $[7,\infty)$ において単調増加である． 境目の実数 7 は両方の区間に属すことに注意すること． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ （ $x>0$ ） と定める． 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

〔解説〕 区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{2}-\ln x\Big) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$



$g'(x)=0$ とすると， $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので $x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のときとに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる．

$$0<x<2 \text{ のとき，} \ \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので [6]} \ g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 \ .$$
$$x>2 \text{ のとき，} \ \frac{1}{x}<\frac{1}{2} \text{ なので [5]} \ g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}>0 \ .$$

よって，関数 g は，区間 $(0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である． $g(2)=1-\ln 2$ なので，g は 2 において極小値 $1-\ln 2$ をとる；極大値はとらない． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.1}}$　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=9x-2\sqrt{x}^3$ （ $x\geq 0$ ） と定める． 関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べよ．

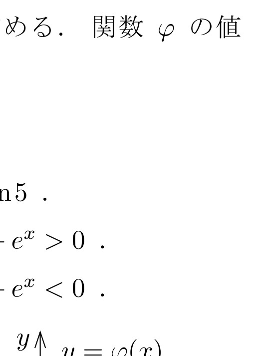
$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=5x-e^x$ と定める． 関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x-e^x) = 5-e^x \ .$$

$\varphi'(x)=0$ とすると， $5-e^x=0$ なので $e^x=5$ ， よって $x=\ln 5$ ．

$$x<\ln 5 \text{ のとき，} \ e^x<e^{\ln 5}=5 \text{ なので [6]} \ \varphi'(x)=5-e^x>0 \ .$$
$$x>\ln 5 \text{ のとき，} \ e^x>e^{\ln 5}=5 \text{ なので [7]} \ \varphi'(x)=5-e^x<0 \ .$$

よって，関数 φ は，区間 $(-\infty,\ln 5]$ において単調増加であり，区間 $[\ln 5,\infty)$ において単調減少である．



$$\varphi(\ln 5) = 5\ln 5 - e^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 \ .$$

φ は，$\ln 5$ において極大値 $5\ln 5-5$ をとり，極小値はとらない． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.2}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=x\ln x-3x$ （ $x>0$ ） と定める． 関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べよ．

関数の値の増減及び極値を調べるために，増減表といわれる表を作ることがある．

$\boxed{\text{例解}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ と定める． 関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\Big) = x^2-6x+5 = (x-1)(x-5) \ .$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-1)(x-5)=0$ なので $x=1,5$ ．

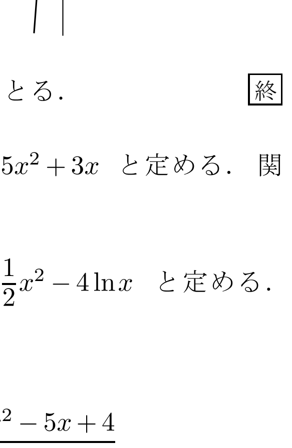
$$x<1 \text{ のとき，} x-1<0 \ , \ x-5<0 \text{ なので } \varphi'(x)=(x-1)(x-5)>0 \ ;$$
$$1<x<5 \text{ のとき，} x-1>0 \ , \ x-5<0 \text{ なので } \varphi'(x)=(x-1)(x-5)<0 \ ;$$
$$x>5 \text{ のとき，} x-1>0 \ , \ x-5>0 \text{ なので } \varphi'(x)=(x-1)(x-5)>0 \ .$$

更に， $f(1)=\dfrac{7}{3}$ ， $f(5)=-\dfrac{25}{3}$ ． $f'(x)$ の値の符号と $f(x)$ の値の増減の状態とを書き込んだ次のような表を増減表という：ここで，右上向きの矢印 ↗ は単調増加の状態を表し，右下向きの矢印 ↘ は単調減少の状態を表す．

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<5$	$x=5$	$5<x$
$x-1$ の値の符号 $x-5$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ の値	↗	$\dfrac{7}{3}$	↘	$-\dfrac{25}{3}$	↗

この増減表を次のように略す．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$x-1$ $x-5$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$	↗	$\dfrac{7}{3}$	↘	$-\dfrac{25}{3}$	↗



増減表から次のことが分かる：関数 f は，区間 $(-\infty,1]$ において単調増加であり，区間 $[1,5]$ において単調減少であり，区間 $[5,\infty)$ において単調増加である；また，f は，1 において極大値 $\dfrac{7}{3}$ をとり，5 において極小値 $-\dfrac{25}{3}$ をとる． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.3}}$　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-5x^2+3x$ と定める． 関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=5x-\dfrac{1}{2}x^2-4\ln x$ と定める． 関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

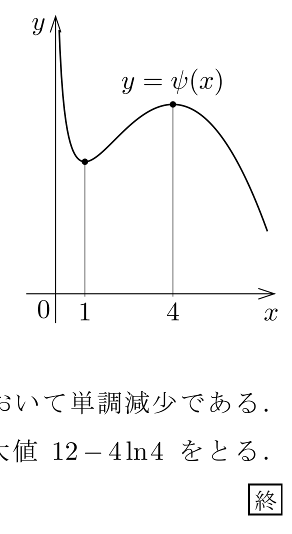
$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\Big(5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x\Big) = 5-x-\frac{4}{x} = -\frac{x^2-5x+4}{x}$$
$$= -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \ .$$

$\psi'(x)=0$ とすると， $-\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}=0$ （ $x>0$ ） なので $x=1,4$ ． 変数 x の値が 0 より大きい範囲で増減表を作る．

$$\psi(1) = \frac{9}{2} \ , \qquad \psi(4) = 12-4\ln 4 \ .$$

増減表は次の様になる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x)=-\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x)=5x-\dfrac{1}{2}x^2-4\ln x$	値なし	↘	$\dfrac{9}{2}$	↗	$12-4\ln 4$	↘



この増減表より，関数 ψ は，区間 $(0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,4]$ において単調増加であり，区間 $[4,\infty)$ において単調減少である． また，ψ は，1 において極小値 $\dfrac{9}{2}$ をとり，4 において極大値 $12-4\ln 4$ をとる． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.4}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$ と定める． 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[0,2\pi]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x+2\sin x$ と定める． 関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

区間 $[0,2\pi]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x+2\sin x) = 1+2\cos x \ .$$

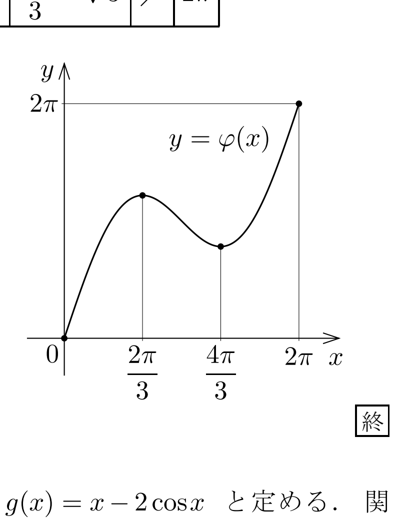
$\varphi'(x)=0$ とすると， $1+2\cos x=0$ ， $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ ， $0\leq x\leq 2\pi$ なので $x=\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ ． 変数 x の値が 0 以上 2π 以下の範囲で増減表を作る．

$$\varphi(0)=0 \ ,$$
$$\varphi\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) = \frac{2\pi}{3}+2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} \ ,$$
$$\varphi\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) = \frac{4\pi}{3}+2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}-\sqrt{3} \ ,$$
$$\varphi(2\pi) = 2\pi \ .$$

増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$\varphi'(x)=1+2\cos x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x)=x+2\sin x$	0	↗	$\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	2π

この増減表より，関数 φ は，区間 $\Big[0,\dfrac{2\pi}{3}\Big]$ において単調増加であり，区間 $\Big[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\Big]$ において単調減少であり，区間 $\Big[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\Big]$ において単調増加である． また，φ は，$\dfrac{2\pi}{3}$ において極大値 $\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$ をとり，$\dfrac{4\pi}{3}$ において極小値 $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ をとる．



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.5}}$　区間 $[0,2\pi]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=x-2\cos x$ と定める． 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べよ．

---

6) 各実数 u,v について， $0<u<v$ ならば $\dfrac{1}{u}>\dfrac{1}{v}$ ．

7) 指数関数 e^x は単調増加なので，各実数 u,v について， $u<v$ ならば $e^u<e^v$ ．