§5.5　関数の最大値・最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の**最大値** (maximum value) といい，最も小さい実数のことを f の**最小値** (minimum value) といった．

正確な定義を述べる． 関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } \ f(p) \geq f(x) \ .$$

また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } \ f(p) \leq f(x) \ .$$

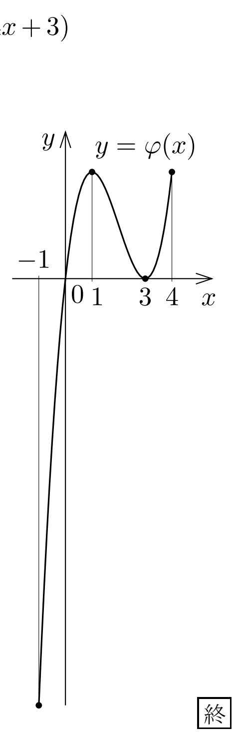
関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけである． 最大値・最小値は無いこともある．

例題　区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ と定める． 関数 φ の最大値・最小値を調べる．

〔解説〕 区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x-1)(x-3) \ .$$

実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると， $3(p-1)(p-3) = 0$ なので， $p = 1, 3$ ． 変数 x の値が -1 以上 4 以下の範囲で増減表を作る．



$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

増減表は次のようになる．

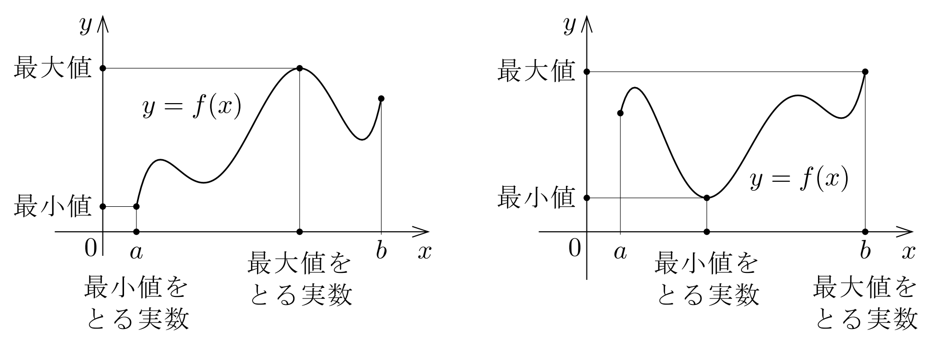
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

関数 φ は，1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり，-1 において最小値 -16 をとる．

終

問題 5.5.1　区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ （ $2 \leq x \leq 7$ ）と定める． ψ の最大値・最小値を調べよ．

実数 a, b について $a < b$ とする． 区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする． 座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．



次のことが成り立つ：f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

　　f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

　　p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f が p において極値をとるとき $f'(p) = 0$ なので（定理 5.1），

　　f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

$$f'(p) = 0 \ \text{ または } \ p = a \ \text{ または } \ p = b \ .$$

従って， $f'(p) = 0$ となる p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で，最大の実数が f の最大値であり，最小の実数が f の最小値である．

例題　区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ と定める． 関数 g の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

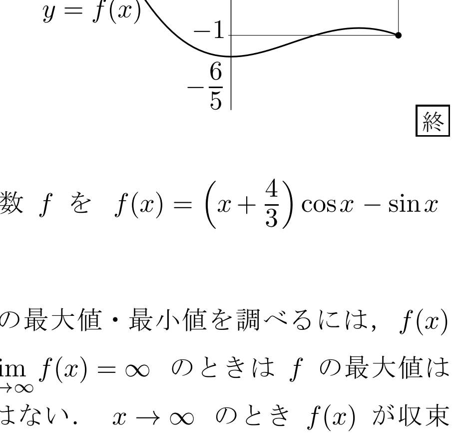
$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x$$
$$= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ .$$

$g'(x) = 0$ とする： $-\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$ ； $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$ ． 従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad g(0) = -\frac{6}{5} \ , \qquad g\left(\frac{6}{5}\right) = -\sin\frac{6}{5} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ .$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，$0 < \frac{6}{5} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin 0 < \sin\frac{6}{5} < \sin\frac{\pi}{2}$ なので $0 < \sin\frac{6}{5} < 1$ ，よって $-1 < -\sin\frac{6}{5} < 0$ なので，

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ .$$



故に，関数 g は，$-\frac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり，0 において最小値 $-\frac{6}{5}$ をとる．

終

問題 5.5.2　区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ と定める． 関数 f の最大値・最小値を調べよ．

例えば，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには，$f(x)$ の値の極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を考える必要がある． $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ のときは f の最大値はない． $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ のときは f の最小値はない． $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するときは，f の最大値・最小値はあったり無かったりする．

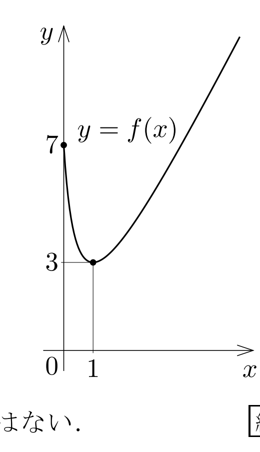
例題　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ と定める． 関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x-2)(2x+1) - (4x^2 - 2x + 7)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} \ .$$

$x \geq 0$ のとき， $2x + 1 \geq 1$ なので $(2x+1)^2 > 0$ ． $0 < x < 1$ のとき， $(x-1)(x+2) < 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} < 0$ ． $x > 1$ のとき， $(x-1)(x+2) > 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} > 0$ ． 関数 f は，区間 $[0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ において単調増加である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}\right)$$
$$= \infty \ .$$



$f(1) = 3$ ． f は 1 において最小値 3 をとる． f の最大値はない．

終

問題 5.5.3　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める． 関数 f の最大値・最小値を調べよ．

例題　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ と定める． f の最大値と最小値とを調べる．

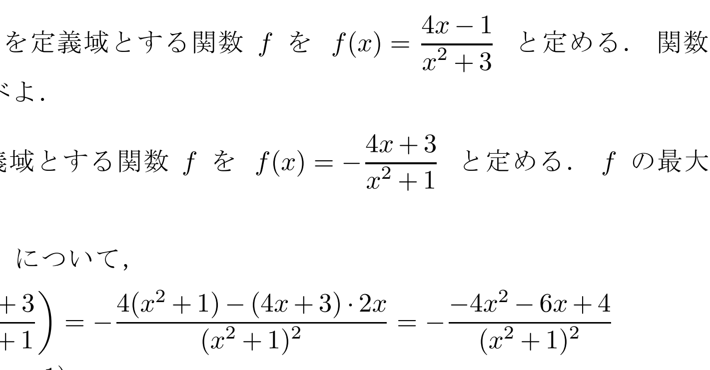
区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x - 3}{x^2 + 1}\right) = -\frac{4(x^2+1) - (4x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$(x^2+1)^2 > 0$ ． $0 < x < 2$ のとき， $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$ ． $x > 2$ のとき， $(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4 - \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= 0 \ .$$

$f(2) = -1$ ． f は 2 において最小値 -1 をとる． $f(0) = 3$ ． $x > \frac{3}{4}$ のとき $3x - 4 > 0$ なので $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1} < 0$ ． f は 0 において最大値 3 をとる．



終

問題 5.5.4　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 3}$ と定める． 関数 f の最大値・最小値を調べよ．

例題　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x + 3}{x^2 + 1}$ と定める． f の最大値と最小値とを調べる．

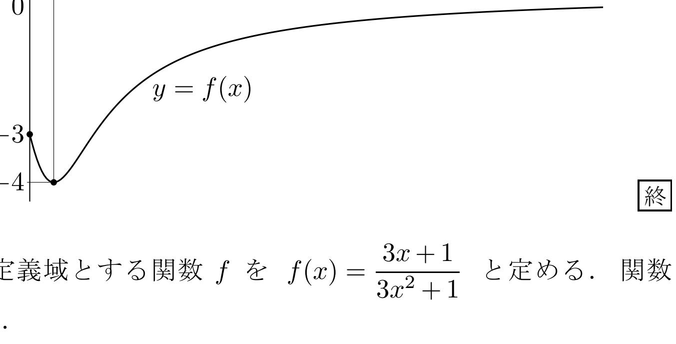
区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x + 3}{x^2 + 1}\right) = -\frac{4(x^2+1) - (4x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$(x^2+1)^2 > 0$ ． $0 < x < \frac{1}{2}$ のとき， $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$ ． $x > \frac{1}{2}$ のとき， $(x+2)(2x-1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} > 0$ ． f は，区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ において単調増加である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= 0 \ .$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ ． f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる． $f(0) = -3$ なので $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 > f(0)$ ． f の最大値はない．



終

問題 5.5.5　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x + 1}{3x^2 + 1}$ と定める． 関数 f の最大値・最小値を調べよ．