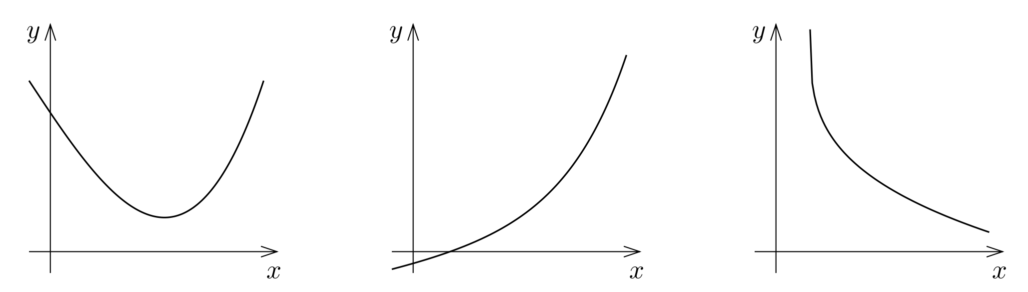
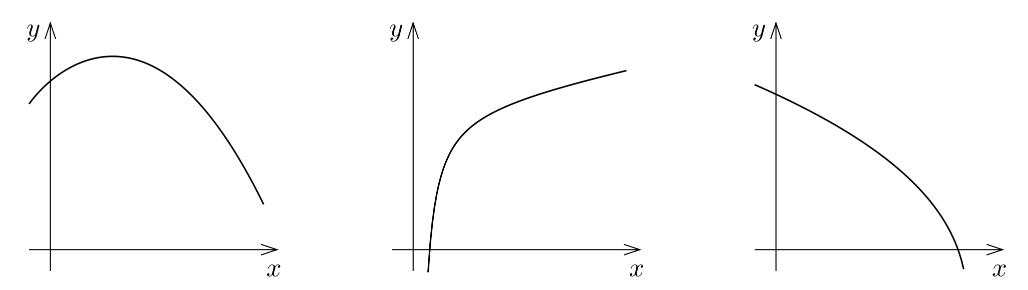
§5.8 関数のグラフの凹凸

まず直観的な話から始めます． xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフについて，次の図のように，下側に出張っているとき，言い替えると，下方に膨らんでいるとき， $y=f(x)$ のグラフは下に凸であるという．



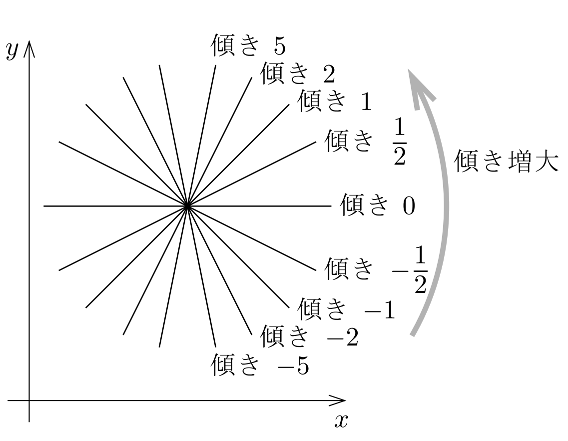
グラフが下に凸の状態

また，xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフについて，次の図のように，上側に出張っているとき，言い替えると，上方に膨らんでいるとき， $y=f(x)$ のグラフは上に凸であるという．



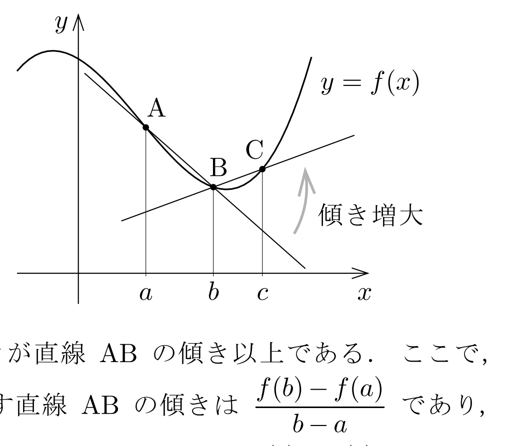
グラフが上に凸の状態

もう少しきちんと考える． まず次のことを注意する：座標平面における直線について，傾きが大きいほど右上がりになり，傾きが小さいほど右下がりになる（右図参照）．



区間 I が関数 f の定義に含まれているとする． 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味する： $a<b<c$ となる I の点 a,b,c に対して，座標平面における関数 f のグラフに属す3点

$$\mathrm{A}=\big(a,f(a)\big)\ ,$$
$$\mathrm{B}=\big(b,f(b)\big)\ ,$$
$$\mathrm{C}=\big(c,f(c)\big)$$



をとると，右図のように，直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上である． ここで，点 $\mathrm{A}=\big(a,f(a)\big)$ と $\mathrm{B}=\big(b,f(b)\big)$ とが属す直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であり，点 $\mathrm{B}=\big(b,f(b)\big)$ と $\mathrm{C}=\big(c,f(c)\big)$ とが属す直線 BC の傾きは $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ である．直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せる：

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

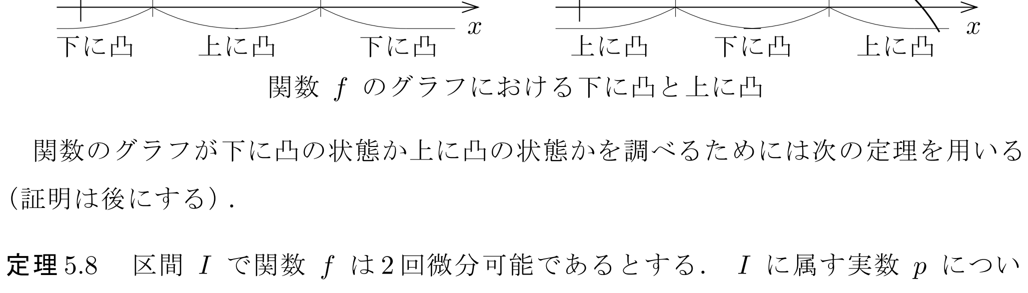
よって，関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義する： I の任意の点 a,b,c に対して，

$$a<b<c \ \text{ならば}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\ .$$

また，関数 f のグラフが区間 I において上に凸であることを次のように定義する： I の任意の点 a,b,c に対して，

$$a<b<c \ \text{ならば}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\ .$$

関数のグラフにおいて，下に凸の範囲と上に凸の範囲との境目となる点を変曲点という． つまり，関数 f のグラフに属す点 P について，P を境にグラフが下に凸から上に凸に変わるとき，及び，P を境にグラフが上に凸から下に凸に変わるとき，点 P を f のグラフの変曲点という．



関数 f のグラフにおける下に凸と上に凸

関数のグラフが下に凸の状態か上に凸の状態かを調べるためには次の定理を用いる（証明は後にする）．

定理 5.8　区間 I で関数 f は2回微分可能であるとする． I に属す実数 p について，点 $\big(p,f(p)\big)$ が f のグラフの変曲点ならば $f''(p)=0$ ． また，

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0\ ,$$
$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \leq 0\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=x^3-6x^2+5x$ と定める． 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．

まず g の第2次導関数 g'' を求める．

$$g'(x)=3x^2-12x+5\ ,$$
$$g''(x)=6x-12=6(x-2)\ .$$

$g''(x)=0$ とすると， $6(x-2)=0$ なので $x=2$ ．

$$x \leq 2 \ \text{のとき}\ x-2 \leq 0 \ \text{なので}\ g''(x)=6(x-2) \leq 0\ ,$$
$$x \geq 2 \ \text{のとき}\ x-2 \geq 0 \ \text{なので}\ g''(x)=6(x-2) \geq 0\ .$$

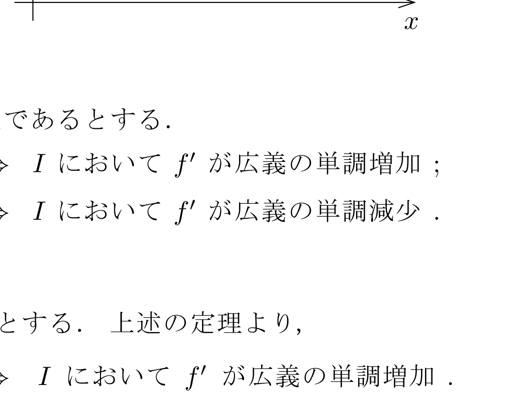
従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty,2]$ において上に凸で，区間 $[2,\infty)$ において下に凸である． また， $g(2)=-6$ なので， g のグラフの変曲点は $(2,-6)$ だけである．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.8.1}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=9x^2-2x^3-3x$ と定める． 関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$\boxed{\text{問題 5.8.2}}$　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^{2x}(x-4)$ と定める． 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

定理5.8を説明する． 関数 f は微分可能とする． 右図を見ると分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が増加すると f のグラフの点 $\big(x,f(x)\big)$ における接線の傾きが増大することである． f のグラフの接線の傾きは微分係数 $f'(x)$ なので，次の定理が成り立つ． その証明は後にする．



定理　区間 I において関数 f は微分可能であるとする．

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}\ ;$$
$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調減少}\ .$$

この定理より定理5.8が導かれる．

区間 I で関数 f は2回微分可能であるとする． 上述の定理より，

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}\ .$$

定理5.3.2より，

$$I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0\ .$$

故に

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0\ .$$

同様に，

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \leq 0\ .$$

――――― 定理の証明

区間 I において関数 f は微分可能であるとする． 次のことを証明する：

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}\ .$$

I において f' が広義の単調増加であると仮定する． $a<b<c$ となる I の任意の3点 a,b,c をとる． 平均値の定理より， $a<\xi_1<b$ ， $b<\xi_2<c$ となるある実数 ξ_1,ξ_2 を選ぶと，

$$f(b)-f(a)=f'(\xi_1)(b-a)\ , \qquad f(c)-f(b)=f'(\xi_2)(c-b)\ ,$$

つまり

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_1)\ , \qquad \frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\xi_2)\ .$$

$a<\xi_1<b<\xi_2<c$ より，ξ_1,ξ_2 は区間 I の点で $\xi_1<\xi_2$ ；仮定より I において f' は広義の単調増加なので， $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ ，従って

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\ .$$

つまり I において f のグラフは下に凸である．

逆に，区間 I において関数 f のグラフが下に凸であると仮定する． I に属す実数 p と q とについて $p<q$ であるとする． $p<u<v<q$ となる変数 u,v をとる． I において f のグラフは下に凸なので， $p<u<v$ より

$$\frac{f(u)-f(p)}{u-p} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}\ ,$$

$u<v<q$ より

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(q)-f(v)}{q-v} = \frac{f(v)-f(q)}{v-q}\ ;$$

従って

$$\frac{f(u)-f(p)}{u-p} \leq \frac{f(v)-f(q)}{v-q}\ .$$

ここで， $u \to p+0$ ， $v \to q-0$ のときの極限をとる． 関数 f は微分可能なので，極限値 $\displaystyle\lim_{u\to p+0}\frac{f(u)-f(p)}{u-p}=f'(p)$ と $\displaystyle\lim_{v\to q-0}\frac{f(v)-f(q)}{v-q}=f'(q)$ とがあって，

$$\lim_{u\to p+0}\frac{f(u)-f(p)}{u-p} \leq \lim_{v\to q+0}\frac{f(v)-f(q)}{v-q}\ ;$$

故に $f'(p) \leq f'(q)$ ．

このように，I の任意の点 p,q について， $p<q$ ならば $f'(p) \leq f'(q)$ ． つまり I において関数 f' は広義の単調増加である．