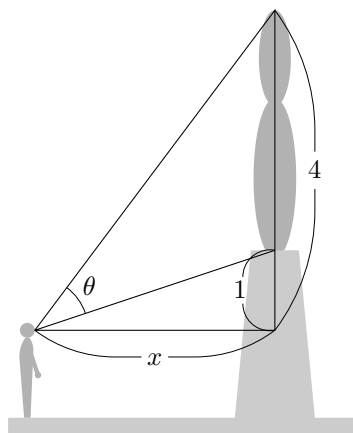


第5章の補遺1 関数の最大値・最小値の利用

例 子供が台座の上にある銅像を見あげる。水平な地面の上に子供も銅像も鉛直方向に立っている。子供の目の位置より、銅像の下端は 1m 高く、銅像の上端は 4m 高い。地面上で銅像の中心からの水平距離が幾らの位置に子供が立てば、子供が銅像を見るときの視角つまり右図の角度 θ が最大になるか、調べる⁷⁾。



子供の目の位置と銅像の中心との間の水平距離を x m ($x > 0$) とおく。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{x} - \tan^{-1} \frac{1}{x}.$$

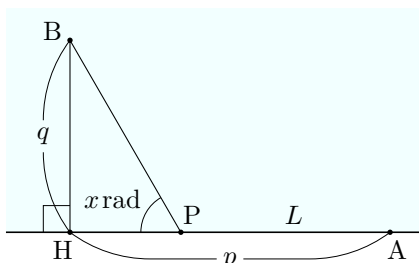
変数 x の関数 $f(x)$ を $\theta = f(x)$ とおく。 $f(x) = \tan^{-1} \frac{4}{x} - \tan^{-1} \frac{1}{x}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{4}{x} - \frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{x}\right)^2} \left(-\frac{4}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{4}{x^2 + 16} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 16} = \frac{x^2 + 16 - 4(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)} \\ &= \frac{3(4 - x^2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $4 - x^2 = 0$ 、 $x = \pm 2$ 、 $x > 0$ なので $x = 2$ 。 $0 < x < 2$ のとき $4 - x^2 > 0$ なので $f'(x) > 0$ 、 $x > 2$ のとき $4 - x^2 < 0$ なので $f'(x) < 0$ 。関数 $f(x)$ は、区間 $(0, 2]$ において単調増加であり、区間 $[2, \infty)$ において単調減少である。関数 $\theta = f(x)$ は 2 において最大値をとる。故に、地面上で銅像の中心から 2m 離れた位置に子供が立てば最も大きく見える。 終

例 直線状の海岸線に立っているライフセイバーが海で溺れかけている人を見つけたとする。一刻も早く駆けつけなければならない。このライフセイバーは海岸をあるところまで走ってから海に入って溺れかけている人のところに泳いでいく。このとき、海岸を走る速さは 8m/s であり、海上を泳ぐ速さは 1.6m/s であるとする。海岸線は直線であるとする。このライフセイバーが走り出してから溺れかけている人のところに泳ぎ着くまでの時間を最短にするためにはどこで海に入って泳ぎ始めればよいか考える。

海岸線を表す直線を L とおき、ライフセイバーが走り出すところを表す点を A とおき、溺れかけている人がいるところを表す点を B とおき、ライフセイバーが海に入って泳ぎだすところを表す点を P とおき、ライフセイバーは、線分 AP が表す経路を走り、線分 PB が表す経路を泳ぐ。点 B から直線 L に下ろした垂線の足を H とおき、長さの単位を m として、 $\overline{AH} = p$ とおき、 $\overline{BH} = q$ とおく。更に変数 x を $x \text{ rad} = \angle BPH$ とおく。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする。



$$\sin x = \frac{\overline{BH}}{\overline{PB}} = \frac{q}{\overline{PB}}, \quad \tan x = \frac{\overline{BH}}{\overline{PH}} = \frac{q}{\overline{PH}},$$

よって、

$$\overline{PB} = \frac{q}{\sin x}, \quad \overline{PH} = \frac{q}{\tan x},$$

更に

$$\overline{AP} = \overline{AH} - \overline{PH} = p - \frac{q}{\tan x}.$$

時間の単位を秒として、ライフセイバーが走り出してから溺れかけている人のところに泳ぎ着くまでの時間 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\overline{AP}}{8} + \frac{\overline{PB}}{1.6} = \frac{p - \frac{q}{\tan x}}{8} + \frac{5 \cdot \frac{q}{\sin x}}{8} = \frac{p}{8} - \frac{q \cos x}{8 \sin x} + \frac{5q}{8 \sin x} \\ &= \frac{p}{8} + \frac{q(5 - \cos x)}{8 \sin x}. \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{q\{\sin x \sin x - (5 - \cos x) \cos x\}}{8 \sin^2 x} = \frac{q(\sin^2 x - 5 \cos x + \cos^2 x)}{8 \sin^2 x} \\ &= \frac{q(1 - 5 \cos x)}{8 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $1 - 5 \cos x = 0$ なので、 $\cos x = \frac{1}{5}$ 、 $x = \cos^{-1} \frac{1}{5}$ 。 $0 < x < \cos^{-1} \frac{1}{5}$ のとき $f'(x) < 0$ で、 $\cos^{-1} \frac{1}{5} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $f'(x) > 0$ なので、 f は $\cos^{-1} \frac{1}{5}$ において最小値をとる。なので、海岸線の方角と溺れかけている人が見える方向の間の鋭角の大きさが $(\cos^{-1} \frac{1}{5}) \text{ rad} \doteq 1.37 \text{ rad} \doteq 78.5^\circ$ であるところまで海岸線を走ってから海に入って泳ぎ始めればよいことになる。この角度は、海岸を走る速さと海上を泳ぐ速さとの比だけで決まる。 終

⁷⁾ このような問題をレギオモンタヌスの問題という。